Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker
Übung 1, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 Es seien $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$ mit $y_i = x_i^2$ als Daten gegeben.

Stellen Sie explizit die Lagrangeschen Grundpolynome sowie das Interpolationspolynom nach Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{und} \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

auf und machen Sie sich bewusst, dass

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = k \\ 0 & \text{, falls } i \neq k \end{cases} \quad \text{sowie} \quad p_n(x_k) = y_k$$

gilt. Was fällt Ihnen am Interpolationspolynom auf ?

Für die gegebenen Daten erhält man die Lagrange-Polynome

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-4)}{(0-1)(0-4)} = \frac{1}{4}(x-1)(x-4), \\ L_1(x) &= \frac{x(x-4)}{(1-0)(1-4)} = -\frac{1}{3}x(x-4), \\ L_2(x) &= \frac{x(x-1)}{(4-0)(4-1)} = \frac{1}{12}x(x-1). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 0 \cdot \frac{1}{4}(x-1)(x-4) - 1 \cdot \frac{1}{3}x(x-4) + 16 \cdot \frac{1}{12}x(x-1) \\ &= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \\ &= x^2 \end{aligned}$$

das die Daten interpolierende Polynom vom Grad 2.

Durch Einsetzen, bei obiger Darstellung auch durch Hinsehen, sieht man, dass $L_0(x_0) = L_1(x_1) = L_2(x_2) = 1$ und $L_i(x_k) = 0$ falls $i \neq k$. Daher ergibt sich auch $p_n(x_k) = y_k$.

Wird ein Polynom vom Grad n an $n+1$ Stützstellen interpoliert, so erhält man als Interpolationspolynom ebendieses zu interpolierende Polynom, hier eben x^2. Dies gilt, weil ein Polynom vom Grad n durch $n+1$ Stützstellen eindeutig bestimmt ist.

G 2 Von einer Funktion y sind folgende Werte bekannt:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	1	0	4

Können diese Werte von einem Polynom maximal dritten Grades stammen?

Das Schema der dividierten Differenzen lautet:

x_i	y_i				
-2	-3	5	-3	1	$-1/24$
-1	2	-1	0	$5/6$	
0	1	-1	$5/2$		
1	0	4			
2	4				

Es ist also $\gamma_{0,4} \neq 0$, was aber für ein Polynom dritten Grades nicht sein kann. Also kann es sich bei den gegebenen Werten **nicht** *um die Werte eines Polynoms dritten Grades handeln.*

G 3 Gegeben seien die folgenden Daten:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-7	-6	-1	8

a) Bestimmen Sie zunächst das Interpolationspolynom nach Lagrange zu diesen Daten.

b) Benutzen Sie anschließend die Newtonsche Darstellung für das Interpolationspolynom und zeigen Sie die Übereinstimmung mit der Lösung aus a).

a) *In der Lagrange-Darstellung erhält man:*

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= -7\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} - 6\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} \\
&\quad -1\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 8\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} \\
&= \frac{-7}{-6}(x^3-3x^2+2x) + \frac{-6}{2}(x^3-2x^2-x+2) \\
&+ \frac{-1}{-2}(x^3-x^2-2x) + \frac{+8}{6}(x^3-x) \\
&= \frac{1}{6}\left[(7-18+3+8)x^3 + (-21+36-3)x^2 + (14+18-6-8)x - 36\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[0x^3 + 12x^2 + 18x - 36\right] \\
&= 2x^2 + 3x - 6
\end{aligned}
$$

b) *Hier arbeitet man mit dem Schema der dividierten Differenzen:*

x_i	y_i			
-1	-7	1	2	0
0	-6	5	2	
1	-1	9		
2	8			

Damit ist $p_3(x) = -7 + 1(x+1) + 2(x+1)x = 2x^2 + 3x - 6.$