Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16./17. Juli 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 13

Gruppenübung

G 38 (*Newton-Verfahren*)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x^3 - x$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-2, 2]$.

b) Führen Sie vier Schritte des Newton–Verfahrens durch, beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = 2$. Tragen Sie die einzelnen Schritte in die Skizze ein.

c) Ist der Startpunkt $x^{(0)} = 0.51$ geeignet, um die Nullstelle $x_N = 0$ mit dem Newton-Verfahren zu finden?

d) Bestimmen Sie einen Startwert $x_0 \neq 0$ so, daß für den Wert nach dem ersten Schritt des Newton–Verfahrens $x_1 = -x_0$ gilt. Wie lauten die weiteren Folgenglieder?

e) Welche Startpunkte sind ungeeignet, um eine Nullstelle zu finden?

G 39 (*Mehrdimensionales Newton–Verfahren*)

Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um die Gleichung

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 0$$

zu lösen. Starten Sie die Iteration bei $x^{(0)} = \binom{1}{0}$ und berechnen Sie 2 Schritte des Verfahrens.
Was ergibt sich für den Startpunkt $x^{(0)} = \binom{1}{1}$?

G 40 (*Vereinfachtes Newton-Verfahren*)

Das nichtlineare Gleichungssystem $F(x) = 0$ mit

$$F(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - \frac{1}{2} x_2 e^{(1-x_2)} \\ 5x_1 - 5x_2 + 3 \end{pmatrix},$$

soll näherungsweise mit dem vereinfachten Newton–Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - AF(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gelöst werden. Die Matrix A sei dabei gegeben durch $A := (\mathcal{J}_F(\bar{x}))^{-1}, \bar{x} = (1, 1)^T$.

a) Schreiben Sie das Verfahren als Picard-Iteration, d.h. in der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und zeigen Sie, dass die Iteration für alle Startwerte $x^{(0)}$ aus $\mathcal{D} := \mathbb{R} \times [0, 2]$ konvergiert.

Hinweis: Benutzen Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Wie viele Schritte des Verfahrens sind erforderlich, um mit $x^{(0)} = \bar{x}$ eine Genauigkeit von $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq 10^{-3}$ zu garantieren? Benutzen Sie dazu den Banach'schen Fixpunktsatz.

c) Bestimmen Sie $x^{(3)}$. Vergleichen Sie den tatsächlichen Fehler mit dem Resultat aus b).

Hausübung

H 40 (***Ferienübung:*** *Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren*)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie mit dem Startvektor $x^{(0)} = (-6, -6)^T$ jeweils drei Schritte des Jacobi-, des Gauß-Seidel-, und des SOR-Verfahrens ($\omega = 1.5$) aus.

b) Erstellen Sie eine Skizze, die die beiden Gleichungen des Systems als Geraden interpretiert (die exakte Lösung lautet $x^* = (3.\overline{6}, 2.\overline{3})^T$) und ergänzen Sie die Skizze um die Iterationsfolgen

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Gauß-Seidel- bzw. SOR-Verfahrens und

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

im Falle des Jacobi-Verfahrens.

H 41 (***Ferienübung:*** *Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren*)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie für das Gleichungssystem $Ax = b$ jeweils die Gleichungen zur Berechnung von $x^{(k+1)}$ auf unter Verwendung

- des Gesamtschrittverfahrens (Jacobi),
- des Einzelschrittverfahrens (Gauß-Seidel),
- des SOR-Verfahrens.

b) Verwenden Sie den Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ und berechnen Sie mit jedem der drei Verfahren $x^{(2)}$ ($\omega = 1.14589$ im Falle des SOR-Verfahrens). Bestimmen Sie die Fehler $\|x^{(2)} - x^*\|_2$.