



## Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 12

### Gruppenübung

#### G 35 (Konditionszahl zeichnerisch)

- a) Skizzieren Sie die Einheitssphäre  $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  im  $\mathbb{R}^2$  zu der euklidischen Norm  $\|x\|_2$ , der Maximumnorm  $\|x\|_\infty$  und der Summennorm  $\|x\|_1$ .
- b) Skizzieren Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Menge  $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$ .

**Hinweis:** Eine lineare Abbildung wie z.B.  $x \rightarrow Ax$  bildet Geraden auf Geraden ab. Der Schnittpunkt zweier Geraden wird auf den Schnittpunkt ihrer Bildgeraden abgebildet.

- c) Berechnen Sie die Konditionszahl  $\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$  mit Hilfe des Aufgabenteils b) und unter Verwendung von  $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}$ .

#### G 36 (Abschätzung der Konditionszahl)

Gegeben sei die  $LR$ -Zerlegung einer Matrix  $A$

$$A = LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^{-4} & * & * & * \\ 0 & 10^{-3} & * & * \\ 0 & 0 & 10^{-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} \end{pmatrix},$$

mit  $* \ll 10^{-4}$  (also sehr klein).

Schätzen Sie die Konditionszahl der Matrix  $A$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ab, ohne dabei  $A$  oder deren Inverse explizit auszurechnen.

#### G 37 (Sensitivität linearer Gleichungssysteme)

Durch Messfehler bei der entsprechenden Anwendung oder durch Rundungsfehler bei vorhergehenden Rechnungen können Werte eines Gleichungssystems leicht gestört sein. Was schon leichte Störungen bewirken können, sehen Sie an folgendem Beispiel. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.98 \\ 0.98 & 0.97 \end{pmatrix}$$

sowie den Vektor

$$b = \begin{pmatrix} -1.97 \\ -1.95 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .  
b) Berechnen Sie die Lösung des gestörten Systems  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.990005 & 0.979996 \\ 0.979996 & 0.970004 \end{pmatrix}$$

sowie den Vektor

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} -1.969967 \\ -1.950035 \end{pmatrix}.$$

Was fällt Ihnen an der Lösung auf ?

- c) Berechnen Sie die Konditionszahl  $\text{cond}_{\|\cdot\|_\infty}(A)$  und schätzen Sie den relativen Fehler

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

der Lösung mittels der Ungleichung in Ihrem Skript ab.

Vergleichen Sie den tatsächlich berechneten relativen Fehler aus Teilaufgabe b) mit der berechneten Abschätzung des relativen Fehlers.

## Hausübung

### H 37 (Abschätzung der Konditionszahl)

Skizzieren Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

die Menge  $\{Ax \mid \|x\|_1 = 1\}$ . Wie lautet die Konditionszahl  $\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A)$ ?

### H 38 (Sensitivität linearer Gleichungssysteme)

Wir betrachten die Matrix  $A$  und die rechte Seite  $b$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Konditionszahl  $\text{cond}_{\|\cdot\|_1}(A)$ .  
b) Schätzen Sie den relativen Fehler  $\frac{\|\tilde{x} - x\|_1}{\|x\|_1}$  der Lösung ab, wenn  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  mit

$$\|\tilde{A} - A\|_1 \leq 0.02, \quad \|\tilde{b} - b\|_1 \leq 0.002 \quad \text{ist.}$$

- c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$   
d) und berechnen Sie die Lösung des gestörten Gleichungssystems  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4.99 & 8.01 \\ 3.01 & 4.99 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.999 \\ 2.001 \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie den tatsächlich berechneten relativen Fehler mit der in Teilaufgabe a) berechneten Abschätzung des relativen Fehlers.

### H 39 (Abschätzung der Konditionszahl)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Skizzieren Sie die Menge  $\{Ax \mid \|x\|_\infty = 1\}$ .  
b) Berechnen Sie die Konditionszahl der Matrix  $A$  bezüglich der  $\infty$ -Norm.  
c) Veranschaulichen Sie diese Konditionszahl anhand der Skizze aus Aufgabenteil a) und unter Verwendung von

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\min_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty}.$$