Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2./3. Juli 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 11

Probeklausur: Am Mittwoch, den 11. Juli 2007, von 17.00-18.30 Uhr findet eine Probeklausur statt. Zur besseren Planung bitten wir um Anmeldung. Hierzu liegt eine Liste zwischen den Räumen S215/348 und S215/349 aus. Die Raumaufteilung für die Klausur wird ebenfalls dort (im Schaukasten) ausgehängt.
Anmeldefrist zur Probeklausur: bis zum 4. Juli 2007.

Gruppenübung

G 32 (*Symmetrie, positive Definitheit*)

Gegeben sei eine Faktorisierung einer Matrix A in der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beantworten Sie (ohne auszumultiplizieren!) folgende Fragen:

a) Ist A symmetrisch?

b) Ist A positiv definit?

G 33 (*Cholesky–Zerlegung*)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 29 & 16 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Cholesky–Zerlegung von A. Ist die Matrix positiv definit?

G 34 (*Schwach besetzte Matrix, Gaußelimination*)

Gegeben sei die schwach besetzte Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & & \\ \times & & \times & & \\ \times & & & \times & \\ \times & & & & \times \end{pmatrix}, \times \text{ steht für ein Element } \neq 0.$$

a) Zeigen Sie: Bei der Gaußelimination werden im ersten Hauptschritt (Elimination der Elemente in Positionen (2,1) bis (5,1)) in A im allgemeinen alle ursprünglichen Nullen zerstört.

b) Finden Sie Permutationen P_1 und P_2, so dass bei Anwendung der Gaußelimination auf P_1AP_2 alle vorhandenen Nullen erhalten bleiben.

Hausübung

H 34 (*Cholesky, Besetztheitsstruktur*)

Gegeben sei eine positiv definite und symmetrische Matrix. Das untere Dreieck dieser Matrix hat folgende Besetztheitsstruktur (wegen der Symmetrie wird immer nur das untere bzw. obere Dreieck gespeichert)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \times & & & & & \\ \times & \times & & & & \\ \bigcirc & \times & \times & & & \\ \hline \times & \bigcirc & \bigcirc & \times & & \\ \bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \times & \\ \bigcirc & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \times \end{array}\right).$$

Dabei steht $\times$ für einen Eintrag ungleich Null und $\bigcirc$ für eine Eintrag gleich Null. Führen Sie den Cholesky-Algorithmus symbolisch mit dieser Matrix durch und bestimmen Sie so die Besetztheitsstruktur der unteren Dreiecksmatrix L. Was passiert mit der Bandstruktur ?

H 35 (*Erhaltung der Bandstruktur*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine (p, q)-Bandmatrix. Begründen Sie, dass der Gauß-Algorithmus ohne Pivotisierung die Bandstruktur erhält, d.h. die linke untere Dreiecksmatrix L aus der LR-Zerlegung von A ist eine $(p, 0)$-Bandmatrix, die rechte obere Dreiecksmatrix R eine $(0, q)$-Bandmatrix.

H 36 (*Cholesky, Besetztheitsstruktur*)

Gegeben sei eine positiv definite und symmetrische Matrix. Das untere Dreieck dieser Matrix hat folgende Besetztheitsstruktur (wegen der Symmetrie wird immer nur das untere bzw. obere Dreieck gespeichert)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & \times & \\ \times & & \times & & & \times \\ \hline \times & & & \times & & \\ & \times & & & \times & \\ & & \times & & & \times \end{array}\right).$$

Dabei steht $\times$ für einen Eintrag ungleich Null. Führen Sie den Cholesky-Algorithmus symbolisch mit dieser Matrix durch und bestimmen Sie so die Besetztheitsstruktur der unteren Dreiecksmatrix L. Was passiert mit der Bandstruktur ?