Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

25./26.Juni 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 10

Probeklausur:
Am Mittwoch, den 11. Juli 2007, von 17.00-18.30 Uhr findet eine Probeklausur statt. Zur besseren Planung bitten wir um Anmeldung. Hierzu liegt eine Liste zwischen den Räumen S215/348 und S215/349 aus. Die Raumaufteilung für die Klausur wird ebenfalls dort (im Schaukasten) ausgehängt.

Gruppenübung

G 28 Gegeben sei die Zerlegung $PA = LR$ mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Führen Sie die folgenden Aufgabenstellungen ohne explizite Berechnung von A durch.

a) In welcher Reihenfolge wurden die Zeilenvertauschungen vorgenommen?

b) Berechnen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = (1, 2, 3)^T$.

G 29 Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

durch Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Interpretieren Sie das Ergebnis als Zerlegung der Form $PA = LR$.

G 30 Gegeben sei das Schema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & \mathbf{\frac{1}{2}} & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{\frac{1}{4}} & \mathbf{\frac{1}{2}} & -1 & -1 \\ 2 & \mathbf{\frac{1}{8}} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{array}.$$

Es wird behauptet, dieses Schema könnte aus der Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Restmatrixpivotsuche, angewandt auf eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, entstanden sein. Überprüfen Sie die Behauptung, ohne A zu rekonstruieren, und geben Sie gegebenenfalls alle Einträge an, die dieser Behauptung widersprechen. Bitte begründen Sie Ihre Antwort!

G 31 Eine Matrix $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $i > j$.
Zeigen Sie:

a) Das Produkt zweier oberer (unterer) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.

b) Für die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt $\det R = r_{11} \cdots r_{nn} = \prod_{j=1}^{n} r_{jj}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Entwicklungssatz für Determinanten.

Hausübung

H 31 Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch Anwendung des Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung. Interpretieren Sie das Ergebnis als Zerlegung der Form $PA = LR$.

H 32 Berechnen Sie die Inverse der folgenden oberen Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 12 \\ & 2 & -6 & -12 \\ & & 3 & 24 \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie die Invertierung der Matrix auf eine Weise, bei der nur der „Speicherplatz“ der Matrix R verwendet wird.

Hinweis: Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungssysteme

$$R\,x = e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

für die Einheitsvektoren $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$.
Diese Lösungen bilden die Spalten der inversen Matrix. Berechnet man zunächst den Fall $i = n$, dann $i = n-1$ usw., so stellt man fest, daß man die Ergebnisse auch platzsparend „speichern“ kann.

H 33 Gegeben ist das Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2.099 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 3.901 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Das System $A\,x = b$ ist sehr empfindlich bei der Durchführung des Gauß-Algorithmus gegenüber Rundungsfehlern. Dabei ist die Pivotisierungsstrategie von entscheidender Bedeutung für die Güte der Lösung. Lösen Sie das System unter Verwendung einer fünfstelligen, dezimalen Gleitpunktarithmetik (Rechnen mit 5 signifikanten Stellen). Benutzen Sie dabei den Gauß-Algorithmus

a) mit Spaltenpivotisierung,

b) ohne Pivotisierung.

Hinweis: Es ist praktisch, die wissenschaftliche Zahlendarstellung mit 4-stelliger Mantisse zu benutzen. Zum Beispiel

$$\begin{array}{rcccl} 1234,567 & \longrightarrow & 1,234567 \cdot 10^3 & \longrightarrow & \texttt{1.2345E+3} \\ 3,141759 & \longrightarrow & 3,141759 \cdot 10^0 & \longrightarrow & \texttt{3.1417E+0} \\ 0,000654321 & \longrightarrow & 6,54321 \cdot 10^{-4} & \longrightarrow & \texttt{6.5432E-4}. \end{array}$$

Bringen Sie **jedes** Zwischenergebnis auf diese Form, und schneiden Sie die hinteren Stellen der Zahldarstellungen ab. (Achtung !! Taschenrechner rechnen oft intern mit höherer Genauigkeit als die Anzeige vortäuscht!)