



## Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 9

### Probeklausur:

Am Mittwoch, den 11. Juli 2007, von 17.00-18.30 Uhr findet eine Probeklausur statt. Zur besseren Planung bitten wir um Anmeldung. Hierzu liegt eine Liste zwischen den Räumen S215/348 und S215/349 aus. Die Raumaufteilung für die Klausur wird ebenfalls dort (im Schaukasten) ausgehängt.

### Gruppenübung

**G 25** Soll die Ableitung einer Funktion  $f$  nicht in der Intervallmitte sondern am Intervallanfang approximiert werden, so kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} = f'(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

Rechnen Sie obige Approximation mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von  $f(x+h)$  und  $f(x+2h)$  nach. (Bis zu welcher Ordnung müssen Sie entwickeln?)

**G 26** Diskretisieren Sie das folgende Randwertproblem mit der Schrittweite  $h = 1/3$  und berechnen Sie Näherungen für die Lösung in  $x_1 = 1/3$  und  $x_2 = 2/3$

$$\begin{aligned} -v''(x) + 2xv'(x) + 2v(x) &= 4x, & x \in (0, 1) \\ v(0) &= 1 \\ v'(1) &= -1 \end{aligned}$$

Benutzen Sie die Differenzenquotienten zweiter Ordnung.

Hinweis: Verwenden Sie fiktive Knoten, um die Ableitungen am Rand von 2. Ordnung zu approximieren.

**G 27** Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-y'' + x^2y' + y^3 = -1, \quad x \in [0, 1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem allgemeinen Gitter  $x_i = 0 + i \cdot h$  mit  $i = 0, \dots, N$  und  $h = \frac{1}{N}$ .

## Hausübung

**H 28** Die Symmetrie hat für numerische Verfahren eine große Bedeutung. Ähnlich zu den Quadraturen bringt die Symmetrie auch in den Differenzenquotienten jeweils eine Ordnung mehr. Bei einem nichtäquidistanten Gitter geht die Symmetrie verloren. Zeigen Sie, dass

$$u_i'' \approx 2 \frac{h_{i+1}u_{i-1} - (h_i + h_{i+1})u_i + h_i u_{i+1}}{h_i h_{i+1} (h_i + h_{i+1})}, \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

nur noch eine Approximation erster Ordnung darstellt.

**H 29** Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' - (1 + x^2)yy' &= 1, \quad x \in [0, 1] \quad \text{mit} \\ y(0) - \frac{1}{2}y'(0) &= 0, \\ y'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Diskretisieren Sie das RWP mit dem Differenzenverfahren 2. Ordnung auf einem Gitter mit  $h = \frac{1}{3}$ . Stellen Sie die Gleichungen explizit auf und eliminieren Sie die fiktiven Knoten.

Hinweis: Fiktive Knoten werden verwendet, um die Ableitungen am Rand von 2. Ordnung zu approximieren.

**H 30** Gegeben sei die Randwertaufgabe in selbstadjungierter Form

$$-((1 + x^2)y')' + y = 0, \quad x \in [0, 1] \quad \text{mit} \quad y(0) = y(1) = 1.$$

- Diskretisieren Sie das RWP nach der symmetrischen Diskretisierung für selbstadjungierte Probleme mit der Schrittweite  $h = \frac{1}{4}$ .
- Differenzieren Sie die selbstadjungierte Gleichung aus und diskretisieren Sie das RWP nach der Standardmethode mit der Schrittweite  $h = \frac{1}{4}$ .