Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11./12.Juni 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 8

Gruppenübung

G 22 Es sei das folgende zweistufige Runge–Kutta–Verfahren gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Führen Sie mit dem Verfahren einen Integrationsschritt mit $h = 1, x_0 = 0, y_0 = 1$ für die DGL $y' = \lambda y,\ \lambda < 0$ durch.

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion und überprüfen Sie, ob das Verfahren A-stabil ist.

G 23 Gegeben seien ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} k_1 & = & f(t,y) \\ k_2 & = & f(t+h, y+hk_1) \\ k_3 & = & f(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{4}(k_1+k_2)) \\ \Phi_1 & = & \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ \Phi_2 & = & \frac{1}{6}(k_1+k_2+4k_3) \end{array} \right.$$

und die homogene lineare autonome DGL $y' = -10y$ mit dem Anfangswert $y(0) = 1$. Testen Sie ob die Vorschlagsschrittweite $h = 0.1$ im Punkt $t = 0$ akzeptiert wird, wenn eine absolute Genauigkeit von $\texttt{TOL} = 0.001$ auf dem Intervall $t \in [0,1]$ gefordert ist. Erfüllt die von der Schrittweitensteuerung vorgeschlagene Schrittweite den Test?

G 24 Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay = \begin{pmatrix} -10000 & 4 & 1 \\ -1 & -100 & 2 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie Abschätzungen für die drei Eigenwerte von A an, die zeigen, daß alle Eigenwerte reell, einfach und echt negativ sind.

b) Stellen Sie die Bestimmungsgleichung für η_1 mit dem impliziten Euler Verfahren (‘Euler rückwärts’) zur numerischen Integration des Systems mit der Schrittweite $h = 10^{-2}$ auf.

c) Wäre die Anwendung des expliziten Euler Verfahrens (‘Euler vorwärts’) oder des expliziten Runge Kutta Verfahrens der Ordnung 4 mit $h = 10^{-2}$ sinnvoll? Begründen Sie ihre Entscheidung.

Hausübung

H 25 Verifizieren Sie, daß die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung durch das Polynom

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$$

gegeben ist.

H 26 Die Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 60 & -120 & 1 \\ 0.1 & 1 & -10000 \end{bmatrix}$$

soll mit dem expliziten Eulerverfahren integriert werden. Wie groß kann die Diskretisierungsschrittweite h gewählt werden, wenn bei beliebigem $y_0 = y_0^h$ die Bedingung $y_i \to 0$ für $i \to \infty$ mit $h > 0$ erfüllt sein soll? Begründen Sie Ihre Wahl.

H 27 **a)** Schreiben Sie ein Matlab-Programm zu dem folgenden eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2,3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \tilde{\gamma}_i & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{array}$$

mit Schrittweitensteuerung, wie sie im Skript beschrieben ist.

b) Verwenden Sie das Programm, um das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -200xy^2 \\ y(-3) &= \frac{1}{901} \end{aligned}$$

auf dem Intervall $[-3, 0]$ mit $\texttt{TOL} = 0.001$ zu berechnen.

c) Berechnen Sie die exakte Lösung und vergleichen Sie diese mit der numerischen Lösung aus b).