Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4./5.Juni 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 7

Gruppenübung

G 19 Es sei $y' = f(t, y)$ mit $f(t, y) = t + 2y$ gegeben. Welche Formel ergibt sich für y_1^h mit gegebenem (t_0, y_0^h), wenn man das durch den folgenden Butcher-Array gegebene Runge-Kutta-Verfahren anwendet ?

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline \gamma_i & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

G 20 Gegeben sei das Koeffizientenschema eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

a) Welche Formel erhält man für y_1, wenn man das dadurch definierte Verfahren auf das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = 1$$

anwendet?

b) Mit welcher Potenz in h geht der Fehler $y_1 - y(h)$ gegen 0, wenn $h \to 0$? Wie groß wird demnach die Konsistenzordnung des Runge-Kutta-Verfahrens sein?

G 21 Zeigen Sie, daß die Trapezregel konsistent von der Ordnung 2 ist.

Hausübung

H 22 Man betrachte das Anfangswertproblem $y' = f(x,y), y(a) = y_a$ mit

$$f(x,y) = -2xy^2 \quad \text{und} \quad a = 1, y_a = \frac{1}{2}.$$

Approximieren Sie die Lösung dieses Problems mit jeweils einem Schritt

a) des Euler-Verfahrens (vorwärts),

b) des Heun-Verfahrens,

c) des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung

unter Verwendung der Schrittweite $h = 0.1$, und vergleichen Sie mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

H 23 Gegeben sei das unvollständige Butcher-Array

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & \beta_{13} \\
\alpha_2 & 1 & \beta_{22} & 0 \\
\frac{1}{2} & \beta_{31} & \frac{1}{4} & \beta_{33} \\
\hline
 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\
\hline
 & \tilde{\gamma}_1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6}
\end{array}$$

Bestimmen Sie

a) die Parameter α_2, β_{ij} und $\tilde{\gamma}_1$ so, daß ein dreistufiges, explizites Runge-Kutta-Verfahren entsteht.

b) die Parameter γ_i so, daß ein eingebettetes Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 2 entsteht. (Das unter a) bestimmte Verfahren hat die Ordnung 3.)

H 24 Zu lösen sei das folgende AWP

$$\dot{x} = -12x, \quad x \in [0,1], \; x(0) = 1$$

mit den Schrittweiten $h = \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$.

a) Implementieren sie dazu das explizite EULER-Verfahren.

b) Implementieren sie dazu das implizite EULER-Verfahren.

c) Geben sie die Ergebnisse dazu jeweils graphisch aus.