Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

29./30.Mai 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 6

Gruppenübung

G 16 Wir betrachten das Dreieck T mit den Eckpunkten (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k). Gesucht ist eine Quadraturformel der Form

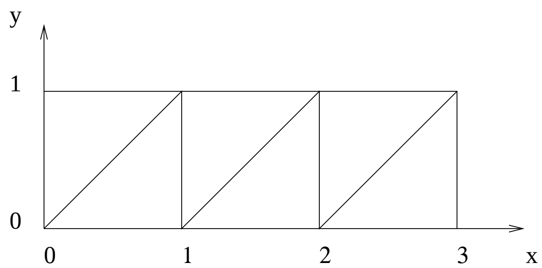
$$\int_T f(x,y)d(x,y) \approx w f(x_0, y_0).$$

Bestimmen Sie den Knoten (x_0, y_0) und das Gewicht w so, daß die Quadraturformel für affin-lineare Funktionen exakt ist.

G 17 Bestimmen Sie mit der Schwerpunktregel eine Näherung des Integrals

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^3 \frac{x\,y}{1+x}\,dx\,dy \\ (&= \frac{3-\ln(4)}{2} = 0.80685) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Zerlegung



G 18 Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ kann man lösen, indem man die zugehörige Integralgleichung

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+h} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$$

betrachtet.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden Quadraturformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a) + \text{Rest}$$

b) Benutzen Sie obige Quadraturformel, um nacheinander Näherungen für die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_4$ mit $y_i = y(x_i)$ für die Differentialgleichung

$$y' = x\,y^2, \qquad y(0) = y_0 = 1,$$

im Falle von $h = \frac{1}{4}$ zu erhalten. Vergleichen Sie diese approximative Lösung mit der wahren Lösung.

Hausübung

H 19 Verwenden Sie die Formel von Collatz und Albrecht

$$\int_{T_0} f(x,y)\,dxdy \approx \frac{1}{60}\left[f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2},0) + f(0,\frac{1}{2})\right] + \frac{9}{60}\left[f(\frac{1}{6},\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{6},\frac{4}{6}) + f(\frac{4}{6},\frac{1}{6})\right]$$

um die Funktion $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$ auf dem Dreieck T mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(3,0)$ und $(4,4)$ zu integrieren.

H 20 Die Differentialgleichung $y' = f(t,y)$ kann man lösen, indem man die zugehörige Integralgleichung

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_i+h} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$$

betrachtet und das Integral mittels der Trapezregel annähert. Hierbei entsteht das folgende implizite Einschrittverfahren

$$y_{i+1}^h \;=\; y_i^h + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i^h) + f(t_i + h, y_{i+1}^h)\right) \tag{1}$$

Benutzen Sie diese Formel, um nacheinander Näherungen $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ für die Werte $y(x_i)$ für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2}, \qquad y(1) = y_0 = 1,$$

im Falle von $h = \frac{1}{10}$ zu erhalten. Vergleichen Sie diese approximative Lösung mit der wahren Lösung .

H 21 Ersetzt man in der obigen Aufgabe den impliziten Teil der Formel durch die Euler-vorwärts-Formel

$$y_{i+1}^h \;=\; y_i^h + hf(t_i, y_i^h) \tag{2}$$

so erhält man das explizite Verfahren von Heun

$$y_{i+1}^h \;=\; y_i^h + \frac{h}{2}\left(f(t_i, y_i^h) + f(t_i + h, y_i^h + hf(t_i, y_i^h))\right). \tag{3}$$

Benutzen Sie diese Formel, um nacheinander Näherungen $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ für die Werte $y(x_i)$ für die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2}, \qquad y(1) = y_0 = 1,$$

im Falle von $h = \frac{1}{10}$ zu erhalten.

Vergleichen Sie diese approximative Lösung mit der wahren Lösung und mit der Lösung aus der obigen Aufgabe.