



Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 5

Gruppenübung

G 13 Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{e^t}{t^2} dt$$

näherungsweise mit der 3-Punkt Gauß-Quadratur-Formel und schätzen Sie den Quadraturfehler ab.

Hinweis: $\left| \frac{d^6}{dt^6} \frac{e^t}{t^2} \right| \leq 30$ für $t \in [2, 3]$.

G 14 Sei T das Dreieck mit den Eckpunkten (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) . Mittels der iterierten Simpsonregel soll eine Näherung für das Integral

$$\int_T f(x, y) d(x, y)$$

hergeleitet werden.

a) Wir betrachten zunächst das Einheitsdreieck T_0 mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Leiten Sie eine Approximation für das Integral

$$\int_{T_0} f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx$$

her, indem Sie zuerst das innere und dann das äußere Integral mit der Simpsonregel approximieren.

b) Leiten Sie mit Hilfe einer Variablentransformation eine Formel für beliebige Dreiecke T her.

G 15 Mit den bekannten Quadraturformeln können auch uneigentliche Integrale approximiert werden. Der Schlüssel dazu ist z.B. die Transformation

$$z = \frac{1}{x - b + 1}$$

Approximieren Sie das Integral

$$\int_1^\infty x e^{-x} dx$$

durch die Anwendung der Transformation und Verwendung der Gauß-Quadraturformel mit 3 Knoten. Vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

Hausübung

H 15 Es sei das Gebiet

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

gegeben. Wieviele Knoten werden mindestens benötigt, um das Integral

$$\int_D p(x, y) d(x, y)$$

zu einem allgemeinen Polynom vom Grad 5

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{5-i} a_{ij} x^i y^j$$

über dem Gebiet D durch iterierte Anwendung der Gauß-Quadratur exakt zu berechnen?

H 16 Berechnung einer Nicht-Standard-Quadratur-Formel zu einem gewichteten Integral: Berechnen Sie A, B, C so, dass die folgende Quadraturformel das gewichtete Integral

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = Af(0) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf(1)$$

exakt berechnet für $f \in \Pi_2$.

H 17 Man berechne

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$$

durch eine 2-dimensionale Trapezregel. Dazu lege man ein Gitter durch das Gebiet mit n Maschen in jeder Richtung und approximiere

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y) dx dy$$

durch die Auswertungen an den Eckpunkten. Wie sieht die allgemeine n -dimensionale Trapezregel für achsenparallele Rechteckgebiete aus?

Man teste das Verfahren mit der 2-dimensionalen Normalverteilung

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Dazu hole man sich die Dateien Trapez2DVorl.m und Normalxy.m.