Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14./15.Mai 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 4

Gruppenübung

G 10 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a, b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante (Trapez–Regel) ergibt sich, wenn die Funktion an den Intervallgrenzen a, b ausgewertet wird und die lineare Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = (b-a)\left(\omega_0 f(a) + \omega_1 f(b)\right).$$

a) Bestimmen Sie zuerst für den Spezialfall $a = -1$ und $b = 1$, also das Intervall $[-1, 1]$, die Gewichte ω_0, ω_1.
Stellen Sie dazu zuerst das lineare Interpolationspolynom $p_1(x)$ zu den Stützstellen $(-1, f(-1))$ und $(1, f(1))$ auf. Integrieren Sie dann $p_1(x)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der obigen Formel, um die Gewichte ω_0 und ω_1 zu erhalten.

b) Führen Sie die Integration von f über $[a, b]$ mittels Substitution auf die Integration über das Intervall $[-1, 1]$ zurück. Verwenden Sie dann das Ergebnis von Aufgabe a), um die Gewichte zu bestimmen.
Hinweis: Die Substitution ist $t = \frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$.

G 11 Approximieren Sie das Integral

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

numerisch mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und der summierten Simpsonregel $S(h)$. Verwenden Sie für die Trapezregel $h = 0.125$ und für die Simpsonregel $h = 0.25$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.000	1.0	0.375	1.546918	0.750	2.0
0.125	1.546918	0.500	1.0	0.875	0.738796
0.250	0.666667	0.625	0.738796	1.0	1.0

G 12 Ist es möglich, ω_0 und x_0 geschickt so zu wählen, dass

$$\int_0^1 f(x)dx = \omega_0 f(x_0)$$

für alle $f \in \Pi_2$ gilt ?

Hausübung

H 12 Interpolationspolynome können verwendet werden, um Integrale über Funktionen in einem Intervall $[a, b]$ nur durch Funktionsauswertungen zu approximieren. Eine Variante (Simpson-Regel) ergibt sich, wenn die Funktion an den Intervallgrenzen a, b und in der Intervallmitte $\frac{1}{2}(a+b)$ ausgewertet wird und die quadratische Interpolierende integriert wird.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = (b-a)\left(\omega_1 f(a) + \omega_2 f(\frac{a+b}{2}) + \omega_3 f(b)\right).$$

Berechnen Sie die festen Gewichte ω_i.

Hinweis: Verwenden Sie $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.

H 13 **a)** Das Restglied der zusammengesetzten Simpsonregel ergibt sich aus der Summe der Einzelfehler.

$$\begin{aligned} R(h) &= \sum_{i=1}^{N} (-\frac{1}{90})(\frac{2h}{2})^5 f^{(4)}(\xi_i) \\ &= h^4(-\frac{1}{180}) \underbrace{\sum_{i=1}^{N} 2h f^{(4)}(\xi_i)} \\ &\approx h^4(-\frac{1}{180}) \int_a^b f^{(4)}(x)dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie für den Fall $f \in \mathbb{C}^4([a, b])$ und $\int_a^b f^{(4)}(x)dx \neq 0$, dass

$$\frac{S(4h) - S(2h)}{S(2h) - S(h)} \approx 16.$$

b) Zwei Integrale wurden mittels der summierten Simpsonregel mit Schrittweiten der Form $h = (\frac{1}{2})^i, i = 0, 1, 2, \ldots$ genähert.

h	$S_1(h)$	$S_2(h)$
1.0	1.37790384228	0.65652626479
0.5	1.37801711902	0.66307928008
0.25	1.37802414599	0.66539818862
0.125	1.37802458433	0.66621818274
0.0625	1.37802461172	0.66650810307
0.03125	1.37802461343	0.66661060593

Ist es plausibel anzunehmen, daß die Integranden C^4-Funktionen sind ?

H 14 Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebener Funktion die zusammengesetzte Trapezregel $(h = H)$

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(ih) + f(1)\right)$$

sowie die zusammengesetzte Simpsonregel ($h = \frac{H}{2}$)

$$S(h) \;=\; \frac{h}{3}\left(f(0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(2ih) + 4\sum_{i=1}^{N} f((2i-1)h) + f(1)\right)$$

auf dem Intervall $[0,1]$ berechnet für die Schrittweiten $H = \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{-30}}$ mit $H = \frac{b-a}{N}$ und eine Tabelle erstellt mit den Werten

$$Q_T(h) \;=\; \frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)}$$

sowie

$$Q_S(h) \;=\; \frac{S(4h) - S(2h)}{S(2h) - S(h)}.$$

Hinweis: Erstellen Sie hierzu die Programmfunktionen $T(h,f)$ und $S(h,f)$, welche dann vom Hauptprogramm aufgerufen werden.

Welche Werte ergeben sich jeweils für $f(x) = \exp x$ und $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ auf $[0,1]$.