Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7./8.Mai 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 3

Gruppenübung

G 7 **a)** Es sei

x	1	3	4	5	8
y	0	0	0	0	0

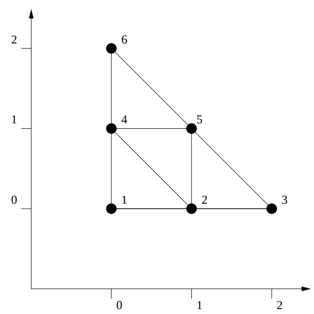
Wie lautet der periodische interpolierende kubische Spline zu diesen Daten? Bitte begründen Sie Ihre Antwort genau.

b) Gibt es einen Wert $y(0)$, so daß der natürliche Spline zu den Daten

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	$y(0)$	1	0

im Intervall $[-2, -1]$ $s_1(x) = x + 2$ und im Intervall $[1, 2]$ $s_4(x) = 2 - x$ lautet?

G 8 Wie lautet die Basisfunktion der stückweise linearen stetigen Interpolation für den Knoten Nr. 5 der unten angegebenen Triangulation ?



G 9 Gegeben sind die vier Punkte $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (0, 1)$. Um durch diese Punkte eine geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurve $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ zu legen, können periodische Splines verwendet werden. Führen Sie dazu folgende Schritte durch:

a) Berechnen Sie im Intervall $[-2, 2]$ zwei periodische kubische Splines $r_1(t)$ und $r_2(t)$, die den Interpolationsbedingungen $r(i - 2) = P_i$ für $i = 0, 1, 2, 3, 4$ genügen, wobei $P_4 := P_0$ gesetzt ist.

b) Skizzieren Sie die entstandene Kurve $r(t)$ einschließlich der Interpolationspunkte P_i.

Hausübung

H 8 Splines

Gegeben seien die drei Punkte in der Ebene $(0,1),(1,2),(3,1)$. Konstruieren Sie

a) den linearen Spline $s_f^1(x) \in C^0([0,3])$ und

b) den kubischen Spline $s_f^3(x) \in C^2([0,3])$ mit natürlichen Randbedingungen.

H 9 Interpolation im $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Ecken des Quadrates $I \times I$, $I = [0,1]$.

x	0	1	0	1
y	0	0	1	1
f	2	1	3	5

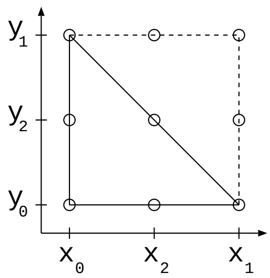
Interpolieren Sie bilinear, d.h. bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom der Form:

$$P_{1,1}(x,y) = a + bx + cy + dxy$$

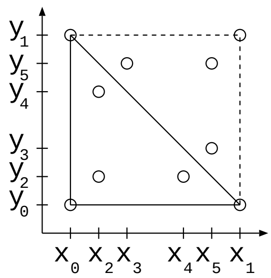
H 10 (*Stetige Interpolation in 2D*)

Eine Funktion $f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \to \mathbb{R}$ soll durch eine auf den Dreiecken der angegebenen Triangulierung stückweise quadratische, auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ stetige Funktion p interpoliert werden.

Um das Interpolationspolynom auf jedem Dreieck eindeutig bestimmen zu können, müssen auf jedem Dreieck sechs Stützstellen der Interpolation liegen. Die beiden Graphiken zeigen zwei Möglichkeiten, diese Stützstellen auf diese Dreiecke zu verteilen.



Anordnung 1



Anordnung 2

a) Zeigen Sie, daß man mit Anordnung 1 Stetigkeit auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ erhält.

b) Finden Sie ein Gegenbeispiel in Form einer möglichst einfachen Funktion f, um zu zeigen, daß sich bei Anordnung 2 nicht unbedingt Stetigkeit auf $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ ergeben muß. (Sie können hierzu den Spezialfall $x_0 = y_0 = -1$, $x_1 = y_1 = 1$ verwenden; genaue Kenntnis der übrigen x_i und y_i ist nicht erforderlch.

H 11 Programmierübung: Spline–Interpolation

Um durch Punkte in der Ebene eine geschlossene, zweimal stetig differenzierbare Kurve zu legen, sollen im folgenden periodische Splines verwendet werden.

a) Schreiben Sie ein Programm, dass zu gegebenen Daten (t_i, x_i) bzw. (t_i, y_i) den periodischen, interpolierenden, kubischen Spline berechnet.

b) Testen Sie ihr Programm, indem Sie die Funktion $\sin x$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ interpolieren. Starten Sie zuerst mit $m = 13$ Intervallen und verdoppeln Sie dann m auf 26 und dann 52.
Protokollieren Sie den maximalen Fehler auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ für $m = 13, 26$ und 52. Welche Beobachtungen bezüglich des Fehlers machen Sie, wenn Sie insbesondere die Konvergenzordnung der Approximation durch den Spline beachten?

c) Verwenden Sie ihr Programm, um folgende Punkte in der Ebene durch eine parametrisierte Kurve zu interpolieren:
   - $P_0 = (0,0), P_1 = (1,1), P_2 = (0,1), P_3 = (-1,1)$
   - $P_0 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (1,1), P_3 = (0,1)$

   Parametrisieren Sie die Kurve mit t und wählen Sie die Stützstellen für den Parameter t dazu auf folgende Art und Weise:

$$t_i - t_{i-1} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

`Hinweis:` Verwenden Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems einfach „\“.
Mit dem Befehl `find(x(1:n-1)<=z & z<x(2:n))` lässt sich derjenige Index i des Knotenvektors x finden, für den $x(i) \leq z \leq x(i+1)$ gilt. Auf diese Weise kann man das Intervall finden, in dem die betrachtete Stelle z liegt. Eine Tridiagonalmatrix lässt sich am einfachsten mit dem Befehl `diag` erzeugen.