Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. P. Spellucci
L. Kamenski
A. Witzel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22./23. April 2007

Numerik für Maschinenbauer und Mechaniker, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Es seien $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4$ mit $y_i = x_i^2$ als Daten gegeben.

Stellen Sie explizit die Lagrangeschen Grundpolynome sowie das Interpolationspolynom nach Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{und} \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

auf und machen Sie sich bewusst, dass

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = k \\ 0 & \text{, falls } i \neq k \end{cases} \quad \text{sowie} \quad p_n(x_k) = y_k$$

gilt. Was fällt Ihnen am Interpolationspolynom auf ?

G 2 Von einer Funktion y sind folgende Werte bekannt:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-3	2	1	0	4

Können diese Werte von einem Polynom maximal dritten Grades stammen?

G 3 Gegeben seien die folgenden Daten:

x_i	-1	0	1	2
y_i	-7	-6	-1	8

a) Bestimmen Sie zunächst das Interpolationspolynom nach Lagrange zu diesen Daten.

b) Benutzen Sie anschließend die Newtonsche Darstellung für das Interpolationspolynom und zeigen Sie die Übereinstimmung mit der Lösung aus a).

Hausübung

H 1 Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ soll mit Hilfe des Newton'schen Interpolationspolynoms vom Grad 2 ($p_2(x)$) zwischen den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ interpoliert werden. Vergleichen Sie den exakten Interpolationsfehler im Punkt $x = 2$ mit der Fehlerabschätzung aus Satz 1.1.5. und skizzieren Sie die Graphen von f und p_2.

H 2 Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{3},\ x_3 = \frac{\pi}{2}$ und geben Sie eine Abschätzung des Restglieds auf dem Intervall $I := [0, \pi/2]$ an.

H 3 (*Programmierübung*)
ACHTUNG: Im Folgenden hat n die Bedeutung der Datenanzahl, entspricht also $n-1$ im Skript (MatLab kennt den Index 0 nicht).

Für folgende Funktionen sollen auf den gegebenen Intervallen Interpolationspolynome vom Grad $n-1$ berechnet werden:

i) $f(x) = e^x,\ x \in [0,1]$ mit $n = 3, 4, 5, 6$,
ii) $f(x) = \frac{1}{1+25x^2},\ x \in [0,1]$ mit $n = 5, 9, 13, 17$,
iii) $f(x) = (x^2)^{1/3},\ x \in [0,1]$ mit $n = 5, 9, 13, 17$,
iv) $f(x) = (x^2)^{1/3},\ x \in [-1,1]$ mit $n = 5, 9, 13, 17$.

a) Schreiben Sie dazu folgende zwei Funktionen:

- *function* c = newtonkoeff(x, y)
  % berechnet zu den Daten $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ die Koeffizienten
  % des Interpolationspolynoms vom Hoechtsgrad $n-1$ in der Form von Newton
  % $p(x) = (((...((x - x_{n-1}) \cdot c_n + c_{n-1}) \cdot (x - x_{n-2} + ... + c_2) \cdot (x - x_1) + c_1$

- *function* pwert = newtonpoly(xx, x, c)
  % berechnet den Wert des Polynoms vom Hoechstgrad $n-1$ in der Form von
  % Newton, gegeben durch die Vektoren $x = [x_1, ..., x_n]$ und $c = [c_1, ..., c_n]$
  % an der Stelle xx

b) Geben Sie eine Tabellierung der Fehlerfunktion $f(x) - p_n(x)$ für alle gegebene f und n aus (Tabellierung mit der Schrittweite $\triangle x = \frac{1}{200}$).

c) Erklären Sie das beobachtete Fehlerverhalten.