Prof. Dr. P. Spellucci
TUD FB Mathematik

11.7.2007

Testklausur Numerische Mathematik SS2007

für MB, WI/MB, VI, Mech(BSc)

Bitte in Blockschrift ausfüllen

Name: ....
Vorname: ....
Fachsemester: ....

Matr.-Nr.: ....
Fachrichtung: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Max. Punkte	4	4	6	6	6	4	8	8	46
Err. Punkte									

Note: ....

Bitte *alle* Blätter mit *Namen* versehen, fortlaufend numerieren und am Schluß der Klausur in das in der Mitte einmal gefaltete Aufgabenblatt legen.

Geben Sie bitte *sämtliche* Zwischenergebnisse bei der Lösung der Klausuraufgaben an. Angabe nur des Endergebnisses oder z.B. "laut Taschenrechner" wird nicht akzeptiert.

Zugelassen sind alle schriftlichen Aufzeichnungen (Bücher, Skripte, ...), sowie *einfache* (insbes. nicht programmierbare) Taschenrechner.
Dies ist eine Auswahlklausur. Zum Erreichen der Note 1.0 genügen auf jeden Fall 34 Punkte.
Bei multiple choice-Fragen kreuzen Sie alle richtigen Antwort an und begründen Ihre Auswahl (z.B. durch Bezug auf Sätze im Skript o.ä.)

Aufgabe 1, (4P)
Gegeben sind 8 Datenpunkte $(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, 7$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_7$ und es ist

$$y_i \ = \ x_i^4, \quad i = 0, \ldots, 7$$

p sei das Interpolationspolynom zu diesen Daten. Dann gilt

- … $p \ \in \ \Pi_7$

- … p hat den genauen Grad 7

- … $p(x) = x^4 \ \forall \ x$

weil …

Aufgabe 2, (4P)
Bestimmen Sie den natürlichen interpolierenden kubische Spline zu den Daten

$$(-2, -2),\ (-1, -1),\ (1, 1),\ (2, 2)$$

Aufgabe 3, (6P)
Es sei $p(x, y)$ die bilineare Interpolierende zu den Daten $(P_1, f_1),\ (P_2, f_2),\ (P_3, f_3),\ (P_4, f_4)$ auf dem Rechteck Q mit den Ecken $P_1 = (1, 0),\ P_2 = (2, 0),\ P_3 = (1, 2),\ P_4 = (2, 2)$ und $q(x, y)$ die lineare Interpolierende zu den Daten $(P_2, f_2),\ (P_4, f_4),\ (P_5, f_5)$ auf dem Dreieck T mit den Ecken $P_2,\ P_4,\ P_5 = (3, 1)$. Dann gilt: die zusammengesetzte Funktion

$$s(x, y) \ = \ \begin{cases} p(x, y) \text{ für } (x, y) \ \in \ Q \\ q(x, y) \text{ für } (x, y) \ \in \ T \end{cases}$$

ist stetig auf $Q \cup T$. Diese Behauptung ist

- … richtig

- … falsch

weil (Begründung, evtl. Skizze auf gesondertem Blatt)

Aufgabe 4, (6P)

Mit einer festen invertierbaren Matrix A wurden drei Gleichungssysteme

$$A\vec{x}_i = \vec{b}_i$$

exakt gelöst. Man erhielt

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (1.0, 0.0, -1.0)^T \quad \text{für} \quad \vec{b}_1 = (1.000, 1.000, 1.000)^T \\ \vec{x}_2 &= (1.1, 0.2, -0.9)^T \quad \text{für} \quad \vec{b}_2 = (0.990, 1.010, 1.000)^T \\ \vec{x}_3 &= (1.0, -0.1, -0.9)^T \quad \text{für} \quad \vec{b}_3 = (1.000, 0.999, 1.000)^T \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie

$$\text{cond}_{||\cdot||_\infty} \geq 100 \ .$$

Aufgabe 5, (6P)
Das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{x^3} x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

soll durch iterierte Gauß-Quadratur exakt berechnet werden. Wieviele Funktionsauswertungen von $f(x, y) = x^2 y^2$ (Knoten) sind dazu notwendig? Antwort und Rechnung auf gesondertem Blatt.

Aufgabe 6, (4P)
Die Formel von Collatz und Albrecht zur 2D-Quadratur lautet

$$\int_{T_0} f(x, y)\mathrm{d}(x, y) \approx \tfrac{1}{60}(f(\tfrac{1}{2}, 0) + f(0, \tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) + \tfrac{9}{60}(f(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}) + f(\tfrac{1}{6}, \tfrac{4}{6}) + f(\tfrac{4}{6}, \tfrac{1}{6})) \ .$$

Dabei ist T_0 das Standarddreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. An welchen Punkten (x, y) muß eine Funktion f ausgewertet werden, wenn sie mit Hilfe dieser Formel auf dem Dreieck T mit den Ecken $(2, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$ näherungsweise integriert werden soll? Geben Sie die Koordinaten explizit an.

Aufgabe 7, (8P)
Gegeben sei das Butcher-Array

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des dadurch definierten Runge-Kutta-Verfahrens . Ist das Verfahren A-stabil?

Aufgabe 8, (8P)
Schreiben sie das lineare Gleichungssystem auf, das man erhält, wenn man die Randwertaufgabe auf dem Intervall [1,2]

$$x^2y'' - (1+x)y' - (2-x)y \ = \ x, \quad 1 \ \leq \ x \ \leq \ 2$$

$$\begin{aligned} y'(1) - y(1) \quad &= \ 1 \\ y(2) \quad &= \ 2 \end{aligned}$$

mit $h \ = \ \frac{1}{3}$ und unter Zuhilfenahme eines fiktiven Punktes diskretisiert und danach den fiktiven Knoten wieder eliminiert. Das System soll nicht gelöst werden!