Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Debrabant

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16./17. Juli 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 13

Gruppenübung

G 25 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, $B \in \mathfrak{A}$.

(i) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) A und B sind unabhängig

(b) A und B^c sind unabhängig

(c) A^c und B^c sind unabhängig.

(ii) Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum und sei $C \in \mathfrak{A}$ ein Ereignis mit $P(C) > 0$. Sei $\mathfrak{B}$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen $P_{X|C} : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ mit

$$P_{X|C}(A) := P(\{X \in A\}|C), \qquad A \in \mathfrak{B}$$

als *bedingte Verteilung von X unter C*. Zeigen Sie, daß $P_{X|C}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}$ ist.

G 26 Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $E|X| < \infty$ und $E|Y| < \infty$. Außerdem gelte für alle $A \in \mathfrak{A}$:

$$E(X \cdot 1_A) \leq E(Y \cdot 1_A).$$

Zeigen Sie, daß daraus

$$P(\{X \leq Y\}) = 1$$

folgt, d.h. $X \leq Y$ P-fast sicher.

G 27 Die Zufallsvariable X sei absolut stetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = 1/2 \cdot \exp(-|x|), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(ii) Bestimmen Sie das q-Quantil von F_X für $q = 1/5$ und $q = 1/2$.

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.
Hinweis: $\int x^2 \exp(ax)dx = \exp(ax)\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$, $a \neq 0$

(iv) Berechnen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyscheff eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(\{|X| < 2\})$ und vergleichen Sie diese mit dem exakten Wert für diese Wahrscheinlichkeit.

G 28 Sei (X_1, X_2) ein diskreter Zufallsvektor mit der Verteilungstabelle:

$P(\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\})$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$
$x_1 = -1$	0.04	0.12	0.16
$x_1 = 0$	0.06	0.18	0.24
$x_1 = 1$	0.025	0.075	0.10

(i) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_1 und X_2.

(ii) Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Geben Sie eine Verteilungstabelle eines Zufallsvektors (X_1', X_2') an, so dass die Randverteilungen sowohl von X_1 und X_1' als auch von X_2 und X_2' übereinstimmen, aber die Verteilung von (X_1', X_2') nicht derjenigen von (X_1, X_2) entspricht (vgl. Skript, Bsp. V.16).

Wir betrachten den Zufallsvektor (Y, Z) mit $Y := \min(X_1, X_2)$ und $Z := \max(X_1, X_2)$.

(iv) Geben Sie die Verteilungstabelle von (Y, Z) an.

(v) Sind die Zufallsvariablen Y und Z unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

G 29 (i) Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2 \ldots, 36$ auf. Ein abergläubischer Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen $3, 13, 23$ oder 33 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl von Runden, die dieser Spieler warten muß, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann.
Bestimmen Sie die Verteilung von X und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{2 \leq X < 5\})$.

(ii) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 Nieten.

G 30 Seien $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariaben mit Erwartungswert μ. Die Varianz von $X_1, \ldots, X_m$ sei σ_X^2 und die Varianz von $Y_1, \ldots, Y_n$ sei σ_Y^2. Betrachten Sie folgende Klasse von Schätzfunktionen für den Parameter μ:

$$g^{(c)}(x) = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{m} + (1-c) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} \qquad 0 \leq c \leq 1.$$

(i) Zeigen Sie, daß jede Schätzfunktion dieser Klasse erwartungstreu ist.

(ii) Welchen dieser Schätzer würden Sie verwenden?