Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Debrabant

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26./27. Juni 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 10

Gruppenübung

G 19 Sei g_n eine Schätzfunktion für γ und $R^\vartheta(g_n)$ bzw. $B^\vartheta(g_n)$ der Quadratmittelfehler bzw. Bias. Zeigen Sie:

(i) $R^\vartheta(g_n) = Var^\vartheta(g_n) + B^\vartheta(g_n)^2$

Wir betrachten nun ein statistisches Modell mit n unabhängigen auf $[0, \vartheta]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Als Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$ wählen wir

$$g_n(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \{x_i\}.$$

(ii) Zeigen Sie, daß $g_n(x)$ nicht erwartungstreu für γ ist und definieren Sie ein $c_n > 0$, sodaß $h_n := c_n \cdot g_n$ eine erwartungstreue Schätzfunktion ist.

(iii) Verwenden Sie das arithmetische Mittel, um eine erwartungstreue Schätzfunktion m_n für γ zu konstruieren.
Berechnen Sie für g_n, h_n und m_n den Quadratmittelfehler und vergleichen Sie diese! Nutzen Sie Aussage (i)!

G 20 Vor einer Theaterkasse warten in einer Schlange 40 Personen, deren Bedienung im Mittel jeweils 50 Sekunden dauert. Es wird angenommen, daß sich die Bedienungszeiten durch unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen beschreiben lassen. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle 40 Personen innerhalb von 35 Minuten bedient werden.

Hausübung

H 37 Für ein $\vartheta > 0$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch $\mathbf{U}(\vartheta, 3\vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen.

(i) Bestimmen Sie den Bias und die Varianz der folgenden Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$:

$$g_n(x) = \overline{x}_n/2.$$

(ii) Ist die Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stark konsistent?

(iii) Ist die Schätzfunktion

$$h_n(x) = (g_n(x))^2 = \frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta^2$? Modifizieren Sie sie gegebenenfalls so, daß sich eine erwartungstreue Schätzfunktion ergibt.

H 38 Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt wie X mit

$$P^\vartheta(\{X=1\}) = \vartheta, \quad P^\vartheta(\{X=-1\}) = P^\vartheta(\{X=0\}) = P^\vartheta(\{X=2\}) = \frac{1-\vartheta}{3},$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ der zu schätzende Parameter sei.

(i) Ist die Schätzfunktion

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(ii) Betrachten Sie die Schätzfunktion

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{1\}}(x_i),$$

also die relative Häufigkeit von Einsen in der Stichprobe. Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(iii) Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen?

(iv) Berechnen Sie für g_n und h_n jeweils den konkreten Schätzwert für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$, falls 20 Wiederholungen des Zufallsexperiments 5 Nullen, 8 Einsen und 4 Zweien ergeben haben.

H 39 Seien $X \sim \mathbf{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ und $Y \sim \mathbf{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung besitzt die Summe $X + Y$?
Wie lässt sich der Beweis verallgemeinern, um VI.3. Satz 52 zu beweisen (Sie sollen diesen Beweis nicht durchführen, sondern nur die Methode nennen)?
Hinweis: Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$.

H 40 Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei $(X_n)_n$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{d} X$ und F_{X_n} bzw. F_X die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Ist F_X stetig, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X_n}(x) - F_X(x)| = 0,$$

d.h. F_{X_n} konvergiert gleichmäßig gegen F_X.
Hinweis: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmäßig stetig.