Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Debrabant

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18./19. Juni 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 9

Hinweis: Tabellen zu ausgewählten Verteilungsfunktion (Normalverteilung etc.) können Sie auf der Homepage zur Vorlesung herunterladen.

Gruppenübung

G 17 Seien U, V, W paarweise unabhängig, identisch $\mathbf{U}[0,2]$-verteilte Zufallsvariablen. Man betrachte die Zufallsvariablen

$$X_1 = 2U, \qquad X_2 = U + 2V, \qquad X_3 = 2U - V + W.$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilung von $U + V$.

(ii) Sei $S := X_1 + X_2 + X_3$. Berechnen Sie $E(S)$ und $Var(S)$.

(iii) Bestimmen Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(\{2 \leq S \leq 12\})$.

G 18 Zeigen Sie: Aus

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

folgt nicht

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1.$$

Hinweis: Wählen sie $\Omega = [0,1]$, P Lebesguemaß auf Ω und $X_n = 1_{A_n}$ für geeignete A_n. Bestimmen Sie X_n bzw. A_n so, daß die Folge X_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert und zeigen Sie, daß diese Folge nicht fast sicher gegen 0 konvergiert.

Hausübung

H 33 Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung:
Für quadratisch integrierbare Zufallsvariablen X, Y gilt

$$|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen Ausdruck der Art $E(aX + bY)^2$.

H 34 Sei $X \sim \mathbf{U}([-1,1])$ und $Y = |X|$.

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y. Welche Ihnen bekannte Verteilung besitzt Y?

(ii) Sind X und Y unkorreliert?

(iii) Sind X und Y unabhängig?

H 35 Mit X_n wird die Anzahl der geworfenen 6 in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel bezeichnet.

(i) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?

(ii) Für $\varepsilon = 0,01$ bestimme man eine Anzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so daß

$$P\left(\left\{\left|\frac{X_{n_0}}{n_0} - \frac{1}{6}\right| \leq 0,01\right\}\right) \geq 0,5$$

gilt, sowohl mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung, der Hoeffdingschen Ungleichung (Vgl. Vorlesung VI.2. Bsp. 34) als auch approximativ mittels des zentralen Grenzwertsatzes.

H 36 Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $X \sim \mathbf{P}(2)$ und $Y \sim \mathbf{Exp}(3)$. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -2\,, \\ x^2 & \text{für } -2 < x \leq 3\,, \\ 12 - x & \text{für } 3 < x\,, \end{cases}$$

definiert. Berechnen Sie $E(h(X))$ und $E(h(Y))$.