Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Debrabant

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11./12. Juni 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 8

Gruppenübung

G 15 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:
Aus
$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1 \qquad (X_n \text{ konvergiert fast sicher gegen } X)$$
folgt
$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0 \qquad (X_n \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen } X).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $A_n := \{\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \epsilon\}$.

G 16 Wir betrachten eine iid Folge von Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit $Y_1 \sim \mathbf{SB}$ und $S_t = \sum_{i=1}^t Y_i$. Sei
$$X_{2T} = |\{t \in \{1, 2, \ldots, 2T\} : S_t \geq 0 \text{ und } S_{t-1} \geq 0\}|.$$

Zeigen Sie:
$$\lim_{T\to\infty} P(\{X_{2T}/(2T) \leq x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \quad \text{für } x \in [0, 1].$$

Hinweis:

- Es gilt $\frac{(2n!)}{(n!)^2} \approx 2^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ für $n \to \infty$. (Stirlingsche Formel)
- Betrachten Sie $P(\{0 < X_{2T}/(2T) \leq \frac{1}{2}\})$ und $P(\{1/2 < X_{2T}/(2T) \leq x\})$. Die enstehenden Reihen bilden Riemannsche Summen (zu welcher Funktion f?).

Hausübung

H 29 Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen folgender Verteilungen:

(i) Geometrische Verteilung $\mathbf{G}(p)$, $p \in (0, 1)$
(ii) Poissonverteilung $\mathbf{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$
(iii) Normalverteilung $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$

Hinweis:

- $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$
- Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, so folgt $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 0$

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

H 30 Wir betrachten folgendes Würfelexperiment:
Man würfelt so lange, bis jede der Zahlen $1, \dots, 6$ mindestens einmal vorgekommen ist.

(i) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?

(ii) Sei X_2 die Anzahl der Würfe, bis das zweite verschiedene Wurfergebnis kommt und X_3 die Anzahl der Würfe, bis das dritte verschiedene Wurfergebnis kommt. Welche Varianz besitzt $X_3 - X_2$?

H 31 Zeigen Sie

(i) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, dann gilt

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}) \qquad E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) P(\{X \geq n\}).$$

(ii) Seien $X_1, \dots, X_n$ iid Zufallsvariablen mit positiven Werten. Dann gilt

$$E\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots X_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß die Folge $\left(\frac{X_i}{\sum_{j=1}^{n} X_j}\right)_{i=1}^{n}$ identisch verteilt ist.

H 32 Herr Apfel besitzt ein Computerfachgeschäft und bietet spezielle Softwarepakete für die Buchhaltung mittelständischer Firmen an. Die jährliche Nachfrage nach dieser Software wird durch eine diskrete Zufallsvariable X beschrieben. Die Verteilung von X ist durch folgende Tabelle gegeben:

x	0	1	2	3	4
$P(\{X = x\})$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Sei $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Anzahl der Softwarepakete, welche Herr Apfel am Jahresanfang bestellt und S die Zufallsvariable, welche die Anzahl der verkauften Softwarepakete angibt.

Herr Apfel kauft die Software für je 10 Euro und verkauft sie zum Preis von je 35 Euro. Da die Software jedes Jahr aktualisiert wird, kann er bis zum Jahresende nicht verkaufte Software weder zurückgeben, noch im darauffolgenden Jahr verkaufen (das heißt, er erleidet einen Verlust). Sei Y sein Nettogewinn.

(i) Stellen Sie S als Funktion von X dar und bestimmen Sie die Verteilung von S in Abhängigkeit von c.

(ii) Stellen Sie Y als Funktion von S dar und bestimmen Sie die Bestellmenge $c_{\max}$, bei der Herr Apfel seinen erwarteten Gewinn maximieren kann.