Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Niese

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29. Mai/01.Juni 2007

# Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 6

## Gruppenübung

**G 11** Die zweidimensionale Zufallsvariable $(X, Y)$ sei absolutstetig verteilt mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Dichten $f_X$ und $f_Y$ sowie die Verteilungsfunktionen $F_X$ und $F_Y$.

(ii) Sind die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ unabhängig?

(iii) Berechnen Sie $P(\{X \leq Y\})$.

**G 12** Seien $X_1$ und $X_2$ Zufallsvariablen. Die gemeinsame Verteilung $P_{X_1,X_2}$ von $X_1$ und $X_2$ sei durch folgendes Tableau gegeben:

| $X_2$ \ $X_1$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{15}$ |

(i) Bestimmen Sie die Randverteilungen $P_{X_1}$ und $P_{X_2}$.

(ii) Sind $X_1$ und $X_2$ unabhängig?

(iii) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq 2\})$.

(iv) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq X_2\})$.

**Hausübung**

**H 21** Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos. D.h. für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ gilt:

$$P(\{X > x + t\}|\{X > t\}) = P(\{X > x\}) \qquad t, x > 0 \qquad (*)$$

(ii) Besitzt eine Verteilung $F_X$ die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit, so ist $F_X$ aus der Familie der Exponentialverteilungen.

**Hinweis zu (ii):**

- Drücken Sie $(*)$ durch $G(x) = 1 - F_X(x)$ aus.
- Zeigen Sie, daß $G(s) = G(1)^s$ für $s \in \mathbb{Q}$ und leiten Sie ab, daß diese Eigenschaft auch für $s \in \mathbb{R}$ gilt.

**H 22** Im Folgenden sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X$.

(i) Definiere die Zufallsvariable $Y$ durch $Y := \max\{X, 0\}$. Wie läßt sich die Verteilungsfunktion $F_Y$ mittels $F_X$ ausdrücken?

(ii) Sei $Y = F_X(X)$. Geben Sie notwendige Bedingungen für $F_X$ an, so daß $Y \sim \mathbf{U}[(0, 1)]$.

**H 23** Sei $X$ eine absolutstetige Zufallsvariable und $f_X$ die zugehörige Dichte. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monotone, differenzierbare Funktion und $Y = h(X)$. Zeigen Sie, dass $Y$ absolutstetig ist und die Dichte

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|$$

besitzt.

**H 24** Die $(X_1,\ X_2,\ X_3)$ gleichverteilt auf der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in [-1, 1]^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Sei ferner $(Y_1, Y_2, Y_3)$ ein Zufallsvektor mit

$$(Y_1, Y_2, Y_3) = \frac{(X_1, X_2, X_3)}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2},}$$

Welche Verteilung besitzt $Y_1$?