Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Niese

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21./22.Mai 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 5

Gruppenübung

G 9 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei X eine Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum mit der Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.

(i) Beweisen Sie Satz IV.14!

(ii) Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ die zugehörige empirische Verteilungsfunktion.
Ist $F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_n)$ eine Verteilungsfunktion?
Geben Sie gegebenenfalls einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und darauf eine Zufallsvariable X', für deren Verteilungsfunktion

$$F_{X'} = F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_n)$$

gilt, an.

G 10 Überlegen Sie sich einen Algorithmus, um folgende Verteilungen zu simulieren:

(i) Exponentialverteilung mit Parameter λ,

(ii) geometrische Verteilung mit Parameter p.

Hausübung

H 17 Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit P wie folgt definiert:

$$P(\{X = x\}) = c(8 - x) \qquad x = 0, 1, \ldots, 5, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Konstante c, die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und $P(\{X > 2\})$.

H 18 Eine Lotteriegesellschaft gibt Lose zum Preis von 1 Euro aus. Auf den Losen befindet sich jeweils eine der Ziffern 0, 1, 3. Sei X die Zufallsvariable, welche die Ziffer auf dem Los definiert. Dann gilt für die Verteilung von X

$$P(\{X = 0\}) = 0.7, \qquad P(\{X = 1\}) = 0.25, \qquad P(\{X = 3\}) = 0.05.$$

Der Gewinn je Los errechnet sich gemäß der Formel

$$h(x) = x^2 + 10,$$

wenn die Ziffer auf dem Los positiv ist. Andernfalls gewinnt der Spieler nichts.
Sie kaufen 3 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Ihr Nettogewinn mindestens 40 Euro beträgt?

H 19 Wir betrachten iid Zufallsvariablen $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$P(\{Y_1 = 1\}) = P(\{Y_1 = -1\}) = \frac{1}{2}$$

und

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} Y_i.$$

Beweisen Sie die Gedächtnislosigkeit der symmetrsichen Bernoulli-Irrfahrt, das heißt, zeigen Sie

$$P(\{S_{t+1} = x\}| \cap_{i=1}^{t} \{S_i = y_i\}) = P(\{S_{t+1} = x\}|\{S_t = y_t\}),$$

wobei x und $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in geeigneter Weise gewählt werden.

Berechnen Sie $P(\{S_{t+1} = x\}|\{S_t = y_t\})$ in Abhängigkeit von x, y und t mit $y \in \{-t, -t+2, \ldots, t-2, t\}$.

H 20 Seien X_1, X_2, ... iid und exponentialverteilt mit $X_i \sim Exp(3)$. Sei $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ und N folgende Zufallsvariable

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} : S_k \leq 1\}.$$

Versuchen Sie durch Simulation die Verteilung von N zu identifizieren (Tipp: die Verteilung ist Ihnen aus der Vorlesung bekannt).

Hinweis: Zur Korrektur sind nur eine kurze Beschreibung der Vorgehensweise (z.B. Algorithmus; KEIN Computerprogramm) und der Name der Verteilung einzureichen.