Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Birgit Niese

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30. April/4.Mai 2007

Einführung in die Mathematische Statistik, Übung 2

Gruppenübung

G 3 In einem Experiment sollen Familien mit zwei Kindern hinsichtlich der Geschlechterkombinationen der zwei Kinder untersucht werden. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Kind, ein Mädchen bzw. ein Junge zu sein, jeweils gleich 0.5 ist.
Das Experiment besteht darin, eine Familie (mit zwei Kindern) zufällig auszuwählen.

(i) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesem Zufallsexperiment zugrunde liegt!

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie einen Jungen hat?

In einem weiteren Experiment werden nur Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen zumindest eines ein Junge ist.

(iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Junge ist?

In einem dritten Experiment (es werden wieder nur Familien mit zwei Kindern betrachtet), besuchen wir eine dieser Familien. Die Tür wird uns von einem Jungen geöffnet.

(iv) Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Junge ist? Überlegen Sie zuerst, wie sich der Ergebnisraum für das dritte Experiment im Vergleich zu den vorangegangenen ändert!

G 4 Gegeben sei eine Folge $(A_i)_{i\in I}$ von Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P(A_i) > 0$ für $i \in I$. Beweisen Sie folgende Aussage:

(i) Für jede endliche Menge $\emptyset \neq J \subseteq I$ gilt
$$P(\cap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

$\Longleftrightarrow$ (ii) Für alle endlichen Mengen $J_1,\ J_2 \subseteq I$ mit $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ gilt
$$P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1} \,|\, \cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) = P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1}).$$

Hausübung

H 5 Seien A, B, C Ereignisse in einem Ereignisraum $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(i) Sind A und B sowie B und C unabhängig und gilt $C \subseteq A$, dann sind auch $A \setminus C$ und B unabhängig.

(ii) Eine Menge M mit $P(M) = 0$ wird als *Nullmenge* bezeichnet. Ist A eine Nullmenge, oder Komplement einer Nullmenge, dann sind A und jede beliebige Menge B unabhängig.

Wir betrachten jetzt zusätzlich eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1,\ A_2,\ \ldots$ in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(iii) Sind für $n \in \mathbb{N}$ die Ereignisse A_n und B unabhängig, dann sind auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und B unabhängig.

H 6 Welche Eigenschaften relativer Häufigkeiten spiegeln sich in der Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen wider?

H 7 Seien Ω_1 und Ω_2 zwei nichtleere Mengen und $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung von Ω_1 nach Ω_2. Seien $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen in Ω_1 bzw. Ω_2.
Überlegen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind (mit Begründung)!

(i) $\{\omega_1 \in \Omega_1 : f(\omega_1) \in \cup_{i\in\mathbb{N}} B_i\} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{\omega_1 \in \Omega_1 :\ f(\omega_1) \in B_i\}$

(ii) $\{\omega_1 \in \Omega_1 : f(\omega_1) \in \cap_{i\in\mathbb{N}} B_i\} = \cap_{i\in\mathbb{N}}\{\omega_1 \in \Omega_1 :\ f(\omega_1) \in B_i\}$

(iii) $\{f(\omega_1) \in \Omega_2 : \omega_1 \in \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i\} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{f(\omega_1) :\ \omega_1 \in A_i\}$

(iv) $\{f(\omega_1) \in \Omega_2 : \omega_1 \in \cap_{i\in\mathbb{N}} A_i\} = \cap_{i\in\mathbb{N}}\{f(\omega_1) :\ \omega_1 \in A_i\}$

H 8 Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein Folge von unabhängigen reellen Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$ in diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Folge in $\mathfrak{M}$, dann gilt

(i) $Y_i := 1_{M_i} \circ X_i$ ist eine ZV für alle $i \in I$

(ii) die Folge $(Y_i)_{i\in I}$ ist unabhängig