



# Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

## 7. Übung

### Gruppenübungen

#### Aufgabe G18

Bei einer bestimmten Therapie zur Behandlung von Neurodermitis kann der Patient in einem Fragebogen angeben, ob seine Beschwerden dadurch als geringer, gleichbleibend oder stärker einzustufen sind. Aus Erfahrung weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit für geringere (gleichbleibende bzw. stärkere) Beschwerden bei  $\frac{1}{3}$  ( $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{1}{6}$ ) liegt. Es liegen Fragebögen von 3 Patienten vor, die sich unabhängig voneinander jeweils für genau eine der vorgegebenen Möglichkeiten entscheiden konnten. Die Zufallsvariable  $X_1$  ( $X_2$  bzw.  $X_3$ ) beschreibe die Anzahl der Patienten, die dabei über geringere (gleichbleibende bzw. stärkere) Beschwerden berichteten.

- Berechnen Sie  $P(\{X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0\})$ .
- Bestimmen Sie die Verteilung der dreidimensionalen Zufallsvariablen  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , indem Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit  $P(\{X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k\})$  angeben, wobei  $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$  und  $i + j + k = 3$ .
- Stellen Sie eine zweidimensionale Wahrscheinlichkeitstabelle für  $X_1$  und  $X_2$  auf. Sind  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig?
- Welche Verteilung besitzt  $X_1$  bzw.  $X_2$ ?

#### Aufgabe G19

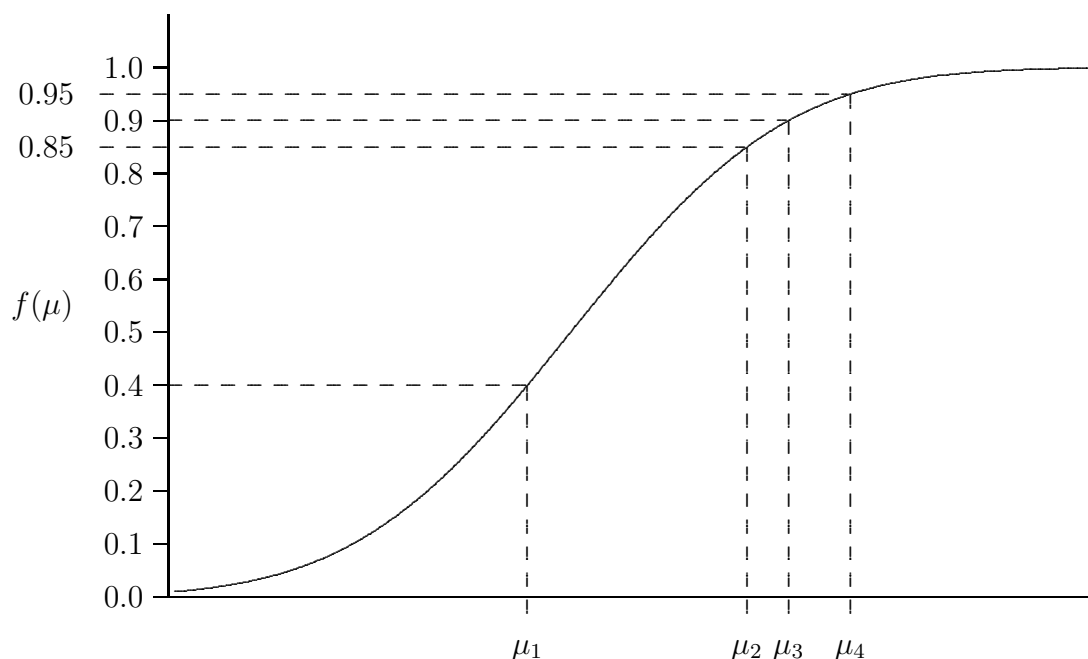
Schneidet man von einer Kabelrolle Kabelstücke mit einer Solllänge von 4 Metern ab, so schwankt die Länge der abgeschnittenen Stücke aufgrund von Mess- und Abschneideungen zufällig. Es soll angenommen werden, dass sich die Länge eines Stücks durch eine Zufallsvariable  $Z$  der Form  $Z = L + A$  angemessen beschreiben lässt, wobei für die voneinander unabhängigen Zufallsvariablen  $L$  und  $A$  gilt:

$$L \sim \mathbf{N}(4, 0.015) \quad \text{und} \quad A \sim \mathbf{U}([-0.03, 0.03])$$

- Schätzen Sie mit Hilfe der Tschebyschevschen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass die Gesamtlänge von 500 abgeschnittenen Stücken zwischen 1995 und 2005 Metern liegt. Welche zusätzlichen Annahmen treffen Sie für Ihre Berechnung?
- Bestimmen Sie unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für die in a) berechnete Wahrscheinlichkeit.

### Aufgabe G20

Gegeben seien unabhängige, identisch  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  mit bekannter Varianz  $\sigma^2 > 0$ . Bei Verwendung des einseitigen Gauß-Tests zum Niveau  $\alpha = 0.15$  entsteht folgende Operationscharakteristik  $f$  für  $n = 25$ :



a) Geben Sie die größtmögliche Hypothese  $\Theta_0$  an.

Gehen Sie für die weiteren Teilaufgaben von der in a) bestimmten Hypothese aus.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung im Fall  $\mu = \mu_1$ ?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine falsche Entscheidung im Fall  $\mu = \mu_4$ ?

d) Was kann man bei einem Stichprobenumfang von  $n = 50$  über den Wert der Operationscharakteristik an der Stelle  $\mu_1$  aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie den Ausdruck  $f(\mu_1)$  in Abhängigkeit von  $n$  betrachten.