Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Debrabant
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 04./05.07.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

6. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G16

a)

Testverfahren:	Gauß-Test (s. Bsp. VII.43) Begründung: Die Varianz σ^2 wird als bekannt vorausgesetzt, und man sucht ein Testverfahren zum Vergleich von μ mit dem vorgegebenen Zahlenwert ($\mu_0 = 63$).
Hypothese:	$\Theta_0 := \{63\}$
Teststatistik:	$g_n(X) = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$; unter Θ_0 gilt $g_n(X) \sim \mathbf{N}(0,1)$.
Verwerfungsbereich:	Wir lehnen Θ_0 ab, falls gilt: $\lvert g_n(x)\rvert \geq u_{1-\alpha/2}$
Realisierung von $g_n(X)$:	$g_{25}(x) = \dfrac{\bar{x}_{25} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/25}} = \dfrac{63.2 - 63}{\sqrt{0.04/25}} = 5.$
Entscheidung:	Wegen $g_{25}(x) = 5 \geq 1.96 = u_{0.975}$ gilt $x \in R_{25}$. Also wird die Hypothese **abgelehnt**.

b) Für den Test aus a) gilt:

$$\begin{aligned} x \notin R_{25} \quad &\Leftrightarrow \quad |g_{25}(x)| < 1.96 \\ &\Leftrightarrow \quad |63.2 - \mu_0| < 1.96 \cdot \sigma/5 \Leftrightarrow 63.1216 < \mu_0 < 63.2784. \end{aligned}$$

Somit wird für alle $\mu_0 \in \mathbb{R}$, welche obige Bedingung erfüllen, der Test nicht abgelehnt.

c) Satz VII.24 sagt aus, dass in der gegebenen Situation ein Konfidenzintervall $[l_n(X), r_n(X)]$ durch

$$\begin{aligned} l_n(X) &= \overline{X}_n - \sigma/\sqrt{n} \cdot u_{1-\alpha/2} \quad \text{und} \\ r_n(X) &= \overline{X}_n + \sigma/\sqrt{n} \cdot u_{1-\alpha/2} \end{aligned}$$

gegeben ist. Mit den gegebenen Daten erhält man folgende Realisierung:

$$\begin{aligned} l_{25}(x) &= 63.2 - 0.2/\sqrt{25} \cdot 1.96 = 63.1216 \quad \text{und} \\ r_{25}(x) &= 63.2 + 0.2/\sqrt{25} \cdot 1.96 = 63.2784. \end{aligned}$$

Ergänzung: Ist $[l_n(x), r_n(x)]$ das konkrete Schätzintervall für μ zum Niveau $1-\alpha$, so gilt: Die Hypothese $\Theta_0 := \{\mu_0\}$ wird beim Gauß-Test zum Niveau α genau dann verworfen, wenn $\mu_0 \notin]l_n(x), r_n(x)[$ gilt. Ein analoger Zusammenhang lässt sich auch beim t-Test und weiteren Parametertests formulieren und beweisen.

Aufgabe G17

a) Satz VII.32 liefert ein Konfidenzintervall $[l_n(X), r_n(X)]$ für μ, das durch

$$\begin{aligned} l_n(X) &= \overline{X}_n - \sqrt{v_n(X)/n} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2} \quad \text{und} \\ r_n(X) &= \overline{X}_n + \sqrt{v_n(X)/n} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2} \end{aligned}$$

gegeben ist. Aus den Daten errechnet man zunächst

$$\begin{aligned} \overline{x}_{25} &= \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} x_i = 699, \\ v_{25}(x) &= \frac{1}{24} \left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot \overline{x}_{25}^2 \right) \qquad \text{(vgl. Bem. VII.10)} \\ &= \frac{1}{24} \left(12\,215\,865 - 25 \cdot 699^2 \right) = 35 \end{aligned}$$

und damit wegen $t_{24;0.95} = 1.7109$ folgende Realisierung des Konfidenzintervalls:

$$\begin{aligned} l_{25}(x) &= 699 - \sqrt{35/25} \cdot 1.7109 \approx 696.9756 \quad \text{und} \\ r_{25}(x) &= 699 + \sqrt{35/25} \cdot 1.7109 \approx 701.0244. \end{aligned}$$

b) Da die Varianz σ^2 unbekannt ist, bietet sich als Teststatistik

$$g_n(X) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{v_n(X)/n}}$$

an. Unter $\mu = \mu_0$ gilt $g_n(X) \sim \mathbf{t}_{n-1}$. Da wir Θ_0 nur dann ablehnen werden, wenn die Realisierung der Teststatistik zu klein ist, wählen wir als kritischen Bereich

$$K_n = (-\infty, \mathbf{t}_{n-1;\alpha}],$$

d.h. für den Verwerfungsbereich gilt

$$R_n = \{g_n \le \mathbf{t}_{n-1;\alpha}\}.$$

Damit ergibt sich nämlich für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art, also für $\mu \in \Theta_0$:

$$\begin{aligned} P^\mu(\{X \in R_n\}) &= P^\mu(\{g_n(X) \in K_n\}) \\ &= P^\mu\left(\left\{ \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{v_n(X)/n}} \le \mathbf{t}_{n-1;\alpha} \right\} \right) \\ &\le P^\mu\left(\left\{ \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{v_n(X)/n}} \le \mathbf{t}_{n-1;\alpha} \right\} \right) = \alpha, \end{aligned}$$

so dass durch die Definitionen von g_n und K_n tatsächlich ein Signifikanztest zum Niveau α entsteht. Die vorletzte Ungleichung entsteht aus der Überlegung, dass für $\mu \in \Theta_0$ gerade $\mu \geq \mu_0$ gilt und damit

$$\bar{X}_n - \mu \leq \bar{X}_n - \mu_0,$$

so dass

$$\{\bar{X}_n - \mu_0 \leq \mathbf{t}_{n-1;\alpha} \cdot \sqrt{v_n(X)/n}\} \subset \{\bar{X}_n - \mu \leq \mathbf{t}_{n-1;\alpha} \cdot \sqrt{v_n(X)/n}\}.$$

c)

Testverfahren:	einseitiger t-Test
Hypothese:	$\Theta_0 := [700, \infty[\times]0, \infty[$
Teststatistik:	$g_n(X) = \dfrac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{v_n(X)/n}}$ (s. b)).
Verwerfungsbereich:	Wir lehnen Θ_0 ab, falls gilt: $g_n(x) \leq \mathbf{t}_{n-1;\alpha}$
Realisierung von $g_n(X)$:	$g_{25}(x) = \frac{\bar{x}_{25} - \mu_0}{\sqrt{v_{25}(x)/25}} = \frac{699-700}{\sqrt{35/25}} \approx -0.8452.$
Entscheidung:	Wegen $g_{25}(x) > -1.7109 = \mathbf{t}_{24;0.05}$ gilt $x \notin R_{25}$. Also wird die Hypothese **nicht abgelehnt**.