Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 31.05 (in S102/344) /06.06.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

4. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G10
Die Zufallsvariable X sei absolutstetig verteilt mit der Dichte

$$f(x) = 1/2 \cdot \exp(-|x|), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

b) Bestimmen Sie das q-Quantil von F_X für $q = 1/5$ und $q = 1/2$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hinweis: $\int x^2 \exp(ax)\, dx = \exp(ax) \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$, $a \neq 0$.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschev eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $P(\{|X| < 2\})$ und vergleichen Sie diese mit dem exakten Wert für diese Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe G11
Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) besitze die Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 - x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie über die (Rand-)Dichten von X und Y deren (Rand-)Verteilungsfunktionen.

b) Sind X und Y unabhängig?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X \leq 1/2, Y > 1/4\})$.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X \leq Y\})$.

e) Wieso können Sie für die Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Teilaufgaben a) und b) ohne weitere Rechnung beantworten?

Aufgabe G12
Zeigen Sie:

a) Sind X und Y diskret verteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$, so ist

$$P(\{X+Y=k\}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} P(\{X=i\})P(\{Y=k-i\}).$$

b) Sind X und Y absolutstetig verteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten f und g, so hat $X+Y$ die Dichte

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(u-v)\,dv.$$

Die Verteilung bzw. die Dichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen wird auch als **Faltung** bezeichnet.

(bitte wenden)

Hausübungen

Abgabe bis 15. Juni, 12.00 Uhr

Briefkasten: S2 15 (Mathebau), 3. Obergeschoss, auf Uebungsgruppe achten

Aufgabe H19

Prüfen Sie jeweils, ob die angegebene Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Skizzieren Sie gegebenenfalls die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X, deren Verteilung durch $P_X(A) = \int_A f(x)\,dx$, $A \in \mathfrak{B}$, gegeben ist.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1/8 & \text{für } 1 \leq x \leq 3, \\ 1/2 & \text{für } 5 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3\pi/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \left(4\sqrt{|x|}\right)^{-1} & \text{für } -1 \leq x < 0 \text{ oder } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe H20

a) Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit reellen Zahlen μ und $\sigma > 0$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Z := (X - \mu)/\sigma$ standardnormalverteilt ist. Folgern Sie daraus:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), x \in \mathbb{R}.$$

b) Sei Y eine $N(2, 4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie (mit Hilfe der zur Verfügung gestellten Tabellen) das 9/10-Quantil von Y sowie die Wahrscheinlichkeiten

(i) $P(\{Y > 3\})$,

(ii) $P(\{1/2 \leq Y \leq 5/2\})$,

(iii) $P(\{|Y - 2| < 1\})$.

Aufgabe H21

Sei $X \sim \mathbf{U}([-1, 1])$ und $Y = |X|$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y. Welche Ihnen bekannte Verteilung besitzt Y?

b) Sind X und Y unkorreliert?

c) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe H22
Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf, wobei jede Zahl gleichwahrscheinlich ist. Setzt man auf die Kolonne $\{1, 2, \ldots, 12\}$ und tritt dann eine dieser Zahlen auf, erhält man den dreifachen Einsatz zurück (Reingewinn: doppelter Einsatz). Anderenfalls verliert man seinen Einsatz.

a) Bestimmen Sie die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz des Reingewinns, falls man nur ein einziges Spiel absolviert und dafür 1 EUR einsetzt.

Dagobert spielt eine Serie von Spielen nach der sogenannten Verdoppelungsstrategie: Er setzt immer auf die Kolonne $\{1, 2, \ldots, 12\}$ und beginnt mit dem Einsatz von 1 EUR. Im Falle eines Gewinns kassiert er den Reingewinn und hört auf. Ansonsten verdoppelt er beim nächsten Spiel seinen Einsatz. Diese Taktik verfolgt er so lange, bis er einmal gewinnt. Nehmen Sie an, dass es keinen Höchsteinsatz gibt und Dagobert über beliebig viel Geld verfügt.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibe die Anzahl der Spiele, die Dagobert macht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{Y > 2\})$ und den Erwartungswert von Y.
c) Zeigen Sie für die Verdoppelungsstrategie, dass der Reingewinn genau $2^{i-1} + 1$ EUR beträgt, wenn Dagobert im i-ten Spiel das erste Mal gewinnt ($i = 1, 2, \ldots$). Was folgt daraus für den Erwartungswert des Reingewinns in einer ganzen Serie?

Aufgabe H23
Der Zufallsvektor (X, Y) sei absolutstetig verteilt mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie über die Randdichten von X und Y deren Randverteilungsfunktionen.
b) Sind X und Y unabhängig?
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X + Y \leq 1\})$.
d) Zeigen Sie allgemein für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)).$$

e) Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X + Y)$ im konkreten Fall des oben eingeführten Zufallsvektors.

Aufgabe H24
Gegeben seien zwei unabhängige, absolutstetig verteilte Zufallsvariablen X, $Y \in \mathfrak{L}_2$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_X und F_Y sowie Dichten f_X und f_Y. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $P(\{X = x, Y = y\}) = f_X(x) \cdot f_Y(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,
b) $P(\{X \leq x, Y > y\}) = F_X(x) \cdot (1 - F_Y(y))\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,
c) $\mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))\big) = 0$,
d) $\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$.