Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23./24.05.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

3. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G7
Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$P(\{X_1 = 18\}) = 0.2, \qquad P(\{X_1 = 13\}) = 0.8.$$

Zeigen Sie:

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 14\}) = 1.$$

Aufgabe G8
Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x/5 & \text{für } 0 < x < 2, \\ c - 1/2 \cdot \exp(-(x-2)) & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

mit einer gewissen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie

a) den Wert von c,

b) die Wahrscheinlichkeit $P(\{1/2 < X \leq 2\})$,

c) die Wahrscheinlichkeit $P(\{X = 2\})$,

d) die Verteilungsfunktion von X^2.

Aufgabe G9

Ein $n = 1000$ Mal durchgeführtes Zufallsexperiment liefert Zahlenpaare, die als Realisierungen von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren angesehen werden können, und zwar:

i	x_i	y_i
1	1	2
2	5	2
3	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	5	2

In der Addition ergeben sich folgende absolute Häufigkeiten:

Zahlenpaar	(1,2)	(1,4)	(3,2)	(3,4)	(5,2)	(5,4)
abs. Häufigkeit	4	167	123	241	311	154

Jemand behauptet, dass die erste und die zweite Komponente des Zufallsvektors unabhängig seien. Entscheiden Sie auf der Grundlage der oben angegebenen Beobachtungen, ob diese Vermutung vernünftig ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(bitte wenden)

Hausübungen

Abgabe bis 01. Juni, 12.00 Uhr

Briefkasten: S2 15 (Mathebau), 3. Obergeschoss, auf Uebungsgruppe achten

Aufgabe H13

Gegeben sei eine Zufallsvariable U mit $U \sim \mathbf{U}([0,1[)$ und $\lambda > 0$.

a) Finden Sie eine Funktion $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass für die Zufallsvariable $X := T \circ U$ gilt: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$.

b) Welche Verteilung besitzt $1 - U$? Was hat Ihr Ergebnis mit Teilaufgabe a) zu tun?

Aufgabe H14

Seien $X_1, \ldots, X_{10}$ unabhängige, identisch $\mathbf{U}([0,1[)$-verteilte Zufallsvariablen und $x_1, \ldots, x_{10}$ eine zugehörige Realisierung (d.h. $x_i = X_i(\omega)$ für $i = 1, \ldots, 10$). Wir betrachten konkret:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.13	0.01	0.45	0.62	0.41	0.74	0.18	0.19	0.62	0.37

a) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion zu dieser Realisierung.

b) Zeichnen Sie in die Skizze aus a) die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung auf $[0,1[$ ein.

c) Lesen Sie den maximalen Abstand zwischen der zuletzt eingezeichneten Funktion und der empirischen Verteilungsfunktion ab (vgl. Satz von Glivenko-Cantelli).

Aufgabe H15

a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen

$$Y := \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{und} \qquad Z := \min(X_1, \ldots, X_n).$$

b) Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und sei F_X die zugehörige Verteilungsfunktion. Zeigen Sie für $a > 0$ und $-\infty < b < \infty$:

$$F_{aX+b}(x) = F_X\Big(\frac{x-b}{a}\Big).$$

Aufgabe H16

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie jeweils die Funktion.

a) $F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2(x+5)) & \text{für } x > -5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 0.5 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \pi/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $F_3(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{3x^2+5} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe H17
Sei (X_1, X_2) ein diskreter Zufallsvektor mit der Verteilungstabelle:

$P(\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\})$	$x_2 = -1$	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$
$x_1 = -1$	0.04	0.12	0.16
$x_1 = 0$	0.06	0.18	0.24
$x_1 = 1$	0.025	0.075	0.10

a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X_1 und X_2.

b) Sind die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie eine Verteilungstabelle eines Zufallsvektors (X_1', X_2') an, so dass die Randverteilungen sowohl von X_1 und X_1' als auch von X_2 und X_2' übereinstimmen, aber die Verteilung von (X_1', X_2') nicht derjenigen von (X_1, X_2) entspricht (vgl. Skript, Bsp. V.15).

Wir betrachten den Zufallsvektor (Y, Z) mit $Y := \min(X_1, X_2)$ und $Z := \max(X_1, X_2)$.

d) Geben Sie die Verteilungstabelle von (Y, Z) an.

e) Sind die Zufallsvariablen Y und Z unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe H18
Ein Kasino bietet folgendes Spiel an: In jeder Spielrunde erhalten Sie mit Wahrscheinlichkeit p den verdoppelten Einsatz oder verlieren mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ Ihren Einsatz. Dabei ist $0 < p \leq 1/2$. Sie betreten das Kasino mit Startkapital $x > 0$ EUR und verlassen das Kasino

- entweder, wenn Ihr Kapital einen vorgegebenen Wert $a > x$ EUR erreicht oder überschritten hat
- oder, wenn Sie bankrott sind.

Entwickeln, simulieren und vergleichen Sie verschiedene Spielstrategien für $a = 10$,

a) $x = 2$, $p = 1/2$,

b) $x = 2$, $p = 18/37$ (Wkt. für Rot bzw. Schwarz beim Roulette),

c) $x = 5$, $p = 1/2$,

d) $x = 5$, $p = 18/37$.