Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 23./24.05.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

3. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G7

Wir definieren die Folge $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen durch

$$Z_i := \frac{X_i - 13}{5}.$$

Dann gilt $P(\{Z_1 = 1\}) = 0.2$ und $P(\{Z_1 = 0\}) = 0.8$, also $Z_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.2)$. Anwendung von Borels starkem Gesetz der großen Zahlen (Satz IV.7) liefert

$$\begin{aligned} 1 &= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) = 0.2\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(\omega) - 13}{5} = 0.2\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i(\omega) - 13) = 1\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 14\}) \end{aligned}$$

Aufgabe G8

a) Laut Satz IV.15 gilt für eine Verteilungsfunktion $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} (c - 1/2 \cdot e^{-(x-2)}) = c - 0$$

folgt $c = 1$.

b) Nach Definition gilt $F_X(x) = P(\{X \le x\})$. Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} P(\{1/2 < X \le 2\}) &= P(\{X \le 2\}) - P(\{X \le 1/2\}) = F_X(2) - F_X(1/2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-(2-2)} - \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

c) Hier gilt

$$P(\{X=2\}) = F_X(2) - \lim_{y\to 2-} F_X(y) = \frac{1}{2} - \lim_{y\to 2-} y/5 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

d) Zunächst stellen wir fest, dass wegen

$$F_{X^2}(x) = P(\{X^2 \le x\})$$

(Definition der Verteilungsfunktion) für $x < 0$ die Funktion F_{X^2} den Wert 0 annimmt. Für $x \ge 0$ formulieren wir die Ungleichung im Ereignis $\{X^2 \le x\}$ um gemäß:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(\{X^2 \le x\}) = P(\{-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}\}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } \sqrt{x} \le 0, \\ \sqrt{x}/5 & \text{für } 0 < \sqrt{x} < 2, \\ 1 - 1/2 \cdot e^{-(\sqrt{x}-2)} & \text{für } \sqrt{x} \ge 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ \sqrt{x}/5 & \text{für } 0 < x < 4, \\ 1 - 1/2 \cdot e^{-(\sqrt{x}-2)} & \text{für } x \ge 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe G9

Nach Korollar IV.10 wissen wir, dass die relativen Häufigkeiten gegen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten konvergieren. Deshalb liefern die relativen Häufigkeiten der einzelnen Zahlenpaare eine gute Näherung für die tatsächliche Verteilung des Zufallsvektors (X, Y):

$r_{1000}(\{X=x, Y=y\})$	$y=2$	$y=4$
$x=1$	0.004	0.167
$x=3$	0.123	0.241
$x=5$	0.311	0.154

Dabei führen wir die Funktion $r_{1000}(A)$ als relative Häufigkeit des Ereignisses $A \in \mathfrak{A}$ ein. Im Falle der Unabhängigkeit von X und Y müsste

$$P(\{X=x, Y=y\}) = P(\{X=x\}) \cdot P(\{Y=y\})$$

für alle reellen Zahlen x, y gelten. Wir prüfen diese Gleichheit wegen der oben angesprochenen Konvergenz für die entsprechenden relativen Häufigkeiten. Wegen (beispielsweise)

$$r_{1000}(\{X=5, Y=2)\}) = 0.311 \ne 0.20367 = 0.465 \cdot 0.438 = r_{1000}(\{X=5\}) \cdot r_{1000}(\{Y=2\})$$

ist die Vermutung als eher unvernünftig einzustufen.