Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007 09./10.05.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

2. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G4

Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten, vier davon heißen Buben. Nach dem Mischen der Karten erhalten die drei Spieler (Alex, Bodo und Carl) jeweils zehn Karten. Die verbleibenden zwei Karten bilden den sogenannten Skat. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Mindestens ein Bube befindet sich im Skat.

B: Carl hat genau einen Buben.

C: Ein Spieler hat genau drei Buben.

D: Jeder Spieler besitzt mindestens einen Buben.

E: Alex hat genau einen Buben unter der Bedingung, dass Carl genau einen Buben hat.

Aufgabe G5

a) Beim Roulette tritt in einem Spiel eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 36$ auf. Ein abergläubischer Spieler beginnt erst mit dem Spiel, nachdem zum ersten Mal eine seiner Unglückszahlen 3, 13, 23 oder 33 aufgetreten ist. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl von Runden, die dieser Spieler warten muss, bevor er mit seinem Spiel beginnen kann.

   (i) Bestimmen Sie die Verteilung von X und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{2 \leq X < 5\})$.

   (ii) Zeigen Sie, dass für eine mit Parameter $p \in]0, 1]$ geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt:
$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : P(\{X > k\}) = (1-p)^k.$$

b) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens acht Nieten.

c) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mehr als drei Abfragen innerhalb einer Minute gibt.

Aufgabe G6
Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge von unabhängigen reellen Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$ auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum. Sei ferner $(M_i)_{i\in I}$ eine Folge in $\mathfrak{M}$ und $Y_i := 1_{M_i} \circ X_i$ $(i \in I)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Y_i ist eine Zufallsvariable für alle $i \in I$.

b) Die Folge $(Y_i)_{i\in I}$ ist unabhängig.

(bitte wenden)

Hausübungen

Abgabe bis 18. Mai, 12.00 Uhr

Briefkasten: S2 15 (Mathebau), 3. Obergeschoss, auf Uebungsgruppe achten

Aufgabe H7

30 Studenten sollen auf zwei Statistik-Tutoriengruppen verteilt werden. Dazu trägt sich jeder Student unabhängig von der Wahl seiner Kommilitonen in eine der beiden ausgelegten Listen ein.

a) Geben Sie eine Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Gruppe aus mindestens vier Studenten besteht?

c) Beweisen Sie mit kombinatorischen Überlegungen die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

d) Beweisen Sie die Formel aus c) durch vollständige Induktion.

Aufgabe H8

a) Auf wieviele Arten kann man die Zahl 10 als Summe von vier Zahlen $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ schreiben, wenn die Reihenfolge der Summanden berücksichtigt werden soll? Vermeiden Sie es dabei, alle Möglichkeiten zu notieren.

b) Auf wieviele Arten kann man die Zahl 10 als Summe von vier Zahlen $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ schreiben, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt? Schreiben Sie alle Möglichkeiten auf und überprüfen Sie so Ihr Ergebnis aus a).

Aufgabe H9

An einer bestimmten Universität sind im Fachbereich Elektrotechnik 1470 Studenten und 30 Studentinnen (also insgesamt 1500 Studierende) immatrikuliert. Jedes Jahr findet für die Studierenden eine freiwillige, semesterübergreifende Informationsveranstaltung statt. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der weiblichen Teilnehmer an einer solchen Veranstaltung, der insgesamt 140 Studierende beiwohnen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{X \leq 1\})$ exakt, z.B. mit geeigneter Software.

b) Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit aus a), indem Sie die folgende in der Vorlesung angesprochene Konvergenzeigenschaft der hypergeometrischen Verteilung von X verwenden:
Sei $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $n > k$ sei X_n eine $\mathbf{H}(n, n_0(n), k)$-verteilte Zufallsvariable. Für ein $p \in]0, 1[$ gelte $\lim_{n\to\infty} \frac{n_0(n)}{n} = p$. Dann gilt für $i = 0, 1, \ldots, k$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n = \ell\}) = \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell}.$$

c) Gehen Sie davon aus, dass der beobachtete Frauenanteil von 2% bei den Studierenden repräsentativ für den Frauenanteil bei den diplomierten Elektrotechniker/-innen ist. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Kongress mit insgesamt 250 diplomierten Elektrotechniker/-innen mindestens 3 Frauen teilnehmen. Nehmen Sie an, dass sich die Teilnehmer/-innen unabhängig voneinander zum Kongress anmelden, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit sowohl exakt als auch mit Hilfe einer geeigneten Näherungsrechnung.

Aufgabe H10

Zur Feststellung der Anzahl N der in einem Revier lebenden Rothirsche wurden in einer Fangaktion insgesamt neun Tiere gefangen und gekennzeichnet. Anschließend wurden die gefangenen Tiere im gleichen Revier wieder freigelassen. Nach einer gewissen Zeit wurde eine weitere Fangaktion durchgeführt. Dabei wurden drei Rothirsche gefangen, und man stellte fest, dass unter diesen genau zwei Rothirsche gekennzeichnet waren. Es wird angenommen, dass zwischen beiden Fangaktionen keine Zu- oder Abgänge von Rothirschen im beobachteten Revier stattgefunden haben.

a) Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der gefangenen und gekennzeichneten Rothirsche in der zweiten Fangaktion angibt. Welche Verteilung besitzt X?

b) Welche Anzahl N an Rothirschen im Revier ist am wahrscheinlichsten?

Hinweis: Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für 2 gekennzeichnete Rothirsche im Falle $N = n$ und $N = n + 1$ (mit $n \geq 10$).

Aufgabe H11

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 mit den folgenden Verteilungen:

$$P(\{X_1 = 0\}) = 0.4, \quad P(\{X_1 = 1\}) = 0.3, \quad P(\{X_1 = 2\}) = 0.2, \quad P(\{X_1 = 3\}) = 0.1,$$
$$P(\{X_2 = 0\}) = 0.4, \quad P(\{X_2 = 1\}) = 0.4, \quad P(\{X_2 = 2\}) = 0.2.$$

Bestimmen Sie jeweils die Verteilung der Zufallsvariablen

$$\text{(i)} \quad U := X_1 + X_2, \qquad \text{(ii)} \quad V := X_1 \cdot X_2, \qquad \text{(iii)} \quad W := \max\{X_1, X_2\},$$

also z.B. für (i) die Wahrscheinlichkeiten $P(\{U = k\})$ für $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H12

Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(\{X = n\}) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) X ist geometrisch verteilt.

(ii) Die Verteilung von X hat die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit, d.h.

$$P(\{X > n + k\} | \{X > n\}) = P(\{X > k\})$$

für alle n, $k \in \mathbb{N}_0$.