Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007 25./26.04.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

1. Übung

Gruppenübungen

Aufgabe G1
Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A_1: Es erscheint mindestens zweimal Kopf.

A_2: Der erste Wurf ergibt Zahl.

A_3: Die beiden letzten Würfe ergeben dasselbe.

a) Geben Sie zunächst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ an.

b) Geben Sie die kleinstmögliche σ-Algebra $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ an, welche das Ereignis A_1 enthält.

c) Prüfen Sie die Ereignisse A_2 und A_3 auf Unabhängigkeit.

d) Sind die Ereignisse $(A_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ unabhängig?

Aufgabe G2
Wird ein Patient darauf untersucht, ob er eine bestimmte Krankheit hat, so gibt es zwei Möglichkeiten, eine falsche Diagnose zu stellen: Man spricht von einem falsch-negativ-Befund, wenn bei einem erkrankten Patienten die Krankheit nicht erkannt wird, bzw. von einem falsch-positiv-Befund, wenn ein gesunder Patient für krank befunden wird. Für eine bestimmte Untersuchungsmethode sei bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.06 ein falsch-negativ-Befund, und mit Wahrscheinlichkeit 0.03 ein falsch-positiv-Befund auftritt. Da es sich um eine eher seltene Krankheit handelt, geht man außerdem davon aus, dass eine zu untersuchende Person mit Wahrscheinlichkeit 0.05 erkrankt ist.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für diese Situation.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine zufällig ausgewählte Person für krank erklärt?

c) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie für krank erklärt wird?

d) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ an.

Aufgabe G3

Es sei Ω eine (nichtleere) endliche Menge und $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Gegeben seien ferner $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $0 < P(B) < 1$. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt? Korrigieren Sie gegebenenfalls die Gleichungen oder geben Sie zusätzliche Voraussetzungen an, unter denen die Aussage richtig ist.

a) $P(A|B) + P(A^c|B) = P(B)$

b) $P(A|B) + P(A|B^c) = P(A)$

c) Aus „A und B sind disjunkt“ folgt „A und B sind unabhängig“

d) „A und B sind unabhängig“ ist äquivalent zu $P(A|B) = P(A)$

e) „A und B sind unabhängig“ ist äquivalent zu $|A \cap B|/|B| = |A|/|\Omega|$

(bitte wenden)

Hausübungen

Abgabe bis 4. Mai, 12.00 Uhr

Briefkasten: S2 15 (Mathebau), 3. Obergeschoss, auf Uebungsgruppe achten

Aufgabe H1
Ein weißer und ein schwarzer Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

A: Die maximale Augenzahl beträgt zwei.

B: Die Augensumme der beiden Würfel ist höchstens gleich vier.

C: Der schwarze Würfel zeigt eine Vier.

D: Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.

E: Die Augensumme der beiden Würfel ist durch drei teilbar.

a) Geben Sie zunächst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ an.

b) Geben Sie die kleinstmögliche σ-Algebra $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ an, welche die Ereignisse A und B enthält.

c) Finden Sie ein Ereignis F, so dass C und F unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Wahl.

d) Sind die Ereignisse C, D und E unabhängig?

Aufgabe H2
Es sollen Familien mit zwei Kindern hinsichtlich der Geschlechterkombinationen der zwei Kinder untersucht werden. Man nimmt an, dass ein Kind jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein Mädchen oder ein Junge ist.

a) Man wählt zufällig eine Familie mit zwei Kindern aus. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für dieses Zufallsexperiment an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie mindestens einen Jungen hat?

Im Folgenden werden nur Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen mindestens eines ein Junge ist.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Junge ist?

Nun besucht man eine der Familien. Die Tür wird von einem Jungen geöffnet.

c) Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Junge ist? Überlegen Sie zuerst, inwiefern sich die Ergebnismenge im Vergleich zu den vorangegangenen Teilaufgaben vergrößert.

Aufgabe H3
Es sei Ω eine (nichtleere) endliche Menge und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig, wenn A ein Ereignis bezeichnet?
(i) $A \in \Omega$ (ii) $A \subseteq \Omega$ (iii) $A \in \mathfrak{A}$ (iv) $A \subseteq \mathfrak{A}$
(v) $A = \{\omega\}$ für ein $\omega \in \Omega$ (vi) $A = \omega$ für ein $\omega \in \Omega$

b) Die Laplace–Annahme sei erfüllt, A und B seien Ereignisse. Welche Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}, \quad \frac{|\Omega| - |B|}{|\Omega|}, \quad \frac{1}{|\Omega|} \quad ?$$

Aufgabe H4

Die Belegschaft einer Firma setzt sich wie folgt zusammen: 50% Arbeiter, 40% Angestellte und 10% leitende Angestellte. Man geht davon aus, dass während eines Jahres ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter) mit Wahrscheinlichkeit p ($p/2$ bzw. $p/4$) die Firma verlässt. Mit Wahrscheinlichkeit 14.5% scheidet ein bestimmtes Belegschaftsmitglied während eines Jahres aus der Firma aus.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für die beschriebene Situation.

b) Bestimmen Sie p.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, welche die Firma verlässt, ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter)? Verwenden Sie jeweils Ihr Ergebnis aus b).

Aufgabe H5

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Ereignissen $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt $P(A) \in \{0, 1\}$, so sind A und jede beliebige Menge $C \in \mathfrak{A}$ unabhängig.

b) Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt sowie A_i und B unabhängig für alle $i \in \mathbb{N}$, dann sind auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ und B unabhängig.

Aufgabe H6

Beweisen Sie Bemerkung 31 aus der Vorlesung:
Gelte $P(A_i) > 0$ für alle $i \in I$ mit einer abzählbaren Indexmenge I. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $(A_i)_{i \in I}$ ist unabhängig.

(ii) Für alle endlichen, nichtleeren Teilmengen $J_1, J_2 \subseteq I$ mit $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ gilt

$$P\Big(\bigcap_{j_1 \in J_1} A_{j_1} \Big| \bigcap_{j_2 \in J_2} A_{j_2}\Big) = P\Big(\bigcap_{j_1 \in J_1} A_{j_1}\Big).$$

Hinweis: Für (ii) $\Rightarrow$ (i) bietet sich vollständige Induktion nach $n = |J|$ (vgl. Def. 28) an.