Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
B. Niese
T. Wagner
Dr. M. Doering

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2007 25./26.04.2007

Einführung in die Statistik für WInf, LaB, CE, Inf BSc etc.

1. Übung, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

Aufgabe G1

a) $\Omega = \{(Z,Z,Z),(Z,Z,K),(Z,K,Z),(Z,K,K),(K,Z,Z),(K,Z,K),(K,K,Z),(K,K,K)\}$,
$\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad A \in \mathfrak{A} \quad \text{(Laplace-Annahme, vgl. Bsp. 10).}$$

b) $A_1 = \{(Z,K,K),(K,Z,K),(K,K,Z),(K,K,K)\}$. Betrachte

$$\mathfrak{A}' = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_1^c\}.$$

Durch Vereinigung, Schneiden oder Komplementbildung von Mengen aus $\mathfrak{A}'$ erhält man wieder Elemente von $\mathfrak{A}'$ (vgl. Def. 6). Damit ist $\mathfrak{A}'$ die kleinstmögliche σ-Algebra $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, welche das Ereignis A_1 enthält.

c) $A_2 = \{(Z,Z,K),(Z,K,Z),(Z,K,K),(Z,Z,Z)\}$,
$A_3 = \{(Z,Z,Z),(K,Z,Z),(Z,K,K),(K,K,K)\}$,
$A_2 \cap A_3 = \{(Z,K,K),(Z,Z,Z)\}$.
Mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß aus a) folgt

$$P(A_2) = \frac{4}{8}, \quad P(A_3) = \frac{4}{8}, \quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8}.$$

Wegen $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2) \cdot P(A_3)$ sind A_2 und A_3 unabhängig.

d) Hier ist die paarweise Unabhängigkeit zu prüfen **sowie** (vgl. Def. 28)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Es gilt $A_1 \cap A_3 = \{(Z,K,K),(K,K,K)\}$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(Z,K,K)\}$ sowie $A_1 \cap A_2 = \{(Z,K,K)\}$. Damit folgt zwar

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_3) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_3), \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3). \end{aligned}$$

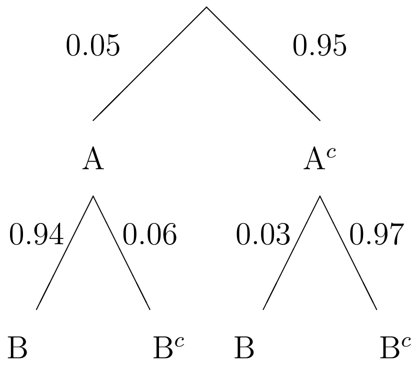
Wegen $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2)$ sind $(A_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ aber nicht unabhängig.

Aufgabe G2

a) Wir definieren zunächst die relevanten Ereignisse:

A: Die Person ist krank.

B: Die Person wird für krank erklärt.



b) Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= 0.94 \cdot 0.05 + 0.03 \cdot 0.95 = 0.0755 \end{aligned}$$

c) Formel von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.94 \cdot 0.05}{0.0755} \approx 0.6225$$

d) Wir definieren zunächst die folgenden Merkmale für eine zufällig ausgewählte Person:

G: Die Person ist gesund.

K: Die Person ist krank.

GE: Die Person wird für gesund erklärt.

KE: Die Person wird für krank erklärt.

Damit: $\Omega = \{(G, GE), (G, KE), (K, GE), (K, KE)\}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Das Wahrscheinlichkeitsmaß definieren wir durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten für die Elementarereignisse:

$$\begin{aligned} P(\{(G, GE)\}) &= 0.95 \cdot 0.97 = 0.9215, \\ P(\{(G, KE)\}) &= 0.95 \cdot 0.03 = 0.0285, \\ P(\{(K, GE)\}) &= 0.05 \cdot 0.06 = 0.003, \\ P(\{(K, KE)\}) &= 0.05 \cdot 0.94 = 0.047\ . \end{aligned}$$

Zusammenhang mit Ereignissen aus a):
$A = \{(K, GE), (K, KE)\}$ und $B = \{(G, KE), (K, KE)\}$.

Aufgabe G3

a) Diese Aussage würde nur für $P(B) = 1$ stimmen, denn:

$$\begin{aligned} P(A|B) + P(A^c|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A^c \cap B))}{P(B)} = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \end{aligned}$$

Lt. Aufgabentext gilt aber $P(B) < 1$.

b) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch (vgl. G2). Es gilt jedoch die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) = P(A).$$

c) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Sie gilt nur, falls $P(A) = 0 \vee P(B) = 0$, denn aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $P(A \cap B) = 0$, so dass im Falle der Unabhängigkeit von A und B gerade $P(A) \cdot P(B) = 0$ gelten muss. Wegen $P(B) > 0$ (lt. Aufgabentext) führt die Voraussetzung $P(A) = 0$ hier zu einer korrekten Aussage.

d) Diese Aussage ist korrekt (vgl. Bem. 25), denn:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

e) Unter der Laplace-Annahme folgt die Aussage aus d), da dann gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

und $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.