Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Döring
B. Niese
T. Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 20./21./22. 06.

Einführung in die Mathematische Statistik

5. Tutorium

Sei $\mu = (\mu_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d$ und $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, wobei Σ symmetrisch und strikt positiv definit ist. Ein d-dimensionaler Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)^T$ mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Kovarianzmatrix Σ.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß f eine Dichte ist.

Hinweis: Für den Fall $\mu = 0$, $\Sigma = I$ siehe Vorlesung.

Die nächste Proposition erklärt die Bezeichnungen für μ und Σ.

Proposition 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= \mu_i, & i &= 1, \dots, d, \\ \mathrm{E}((X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)) &= \sigma_{ij}, & i,j &= 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie Proposition 1.

Die folgenden beiden Sätze haben zentrale Eigenschaften der mehrdimensionalen Normalverteilung zum Inhalt.

Satz 1. *Für die eindimensionalen Randverteilungen von X gilt:*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii}), \qquad i = 1, \dots, d.$$

Satz 2. *$X_1, \dots, X_d$ sind genau dann unabhängig, wenn Σ eine Diagonalmatrix ist.*

Aufgabe 3. Beweisen Sie Satz 1 für den Fall $d = 2$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie Satz 2.

Aufgabe 5. Nach Satz 1 sind die eindimensionalen Randverteilungen einer d-dimensional normalverteilten Zufallsvariable wieder normalverteilt. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? Finden Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!