Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Döring
B. Niese
T. Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 13./14./15. 06.

Einführung in die Mathematische Statistik

4. Tutorium

Ziel dieses Tutoriums ist es, das Borelsche starke Gesetz der großen Zahlen (vgl. Satz 7, Kapitel IV-2) zu beweisen. Zugrundegelegt sei im folgenden immer ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Satz 1. (Borels starkes Gesetz der großen Zahlen)
Sei $p \in [0,1]$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$. Weiterhin sei

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \textit{und} \qquad C = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot S_n(\omega) = p\}.$$

Dann gilt

$$C \in \mathfrak{A} \qquad \textit{und} \qquad P(C) = 1.$$

Für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen ist das Ereignis $\limsup_{n\to\infty} A_n$ durch

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

definiert. Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir das 1. Borel-Cantelli Lemma.

Lemma 1. (1. Borel-Cantelli Lemma)
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty \implies P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie Lemma 1.

Aufgabe 2. Beweisen Sie Satz 1. Setzen Sie dabei die Meßbarkeit der Menge C voraus und gehen Sie wie folgt vor:

(1) Betrachten Sie zuerst die Ereignisse

$$A_i^\varepsilon = \{\omega \in \Omega : |1/i^2 \cdot S_{i^2}(\omega) - p| \geq \varepsilon\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

mit $\varepsilon > 0$ und zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung und Lemma 1

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n^\varepsilon) = 0.$$

(2) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (1)

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} 1/n^2 \cdot S_{n^2}(\omega) = p\}) = 1.$$

Beschreiben Sie dazu zuerst das Ereignis $\limsup_{n\to\infty} A_n$ in Worten.

(3) Zeigen Sie, daß für $i \in \{n^2, n^2+1, \ldots, (n+1)^2\}$ die Abschätzung

$$|1/i \cdot S_i - p| \leq \left|1/n^2 \cdot S_{n^2} - p\right| + c(p)/n$$

gilt, wobei $c(p) > 0$ eine nur von p abhängige Konstante ist.

(4) Beweisen Sie nun mit Schritt (2) und (3) Satz 1.

Mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (Satz 32, Kapitel VI-2) für Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen läßt sich das Weierstraßsche Approximationstheorem (vgl. Einführung in die Numerische Mathematik) in eleganter Weise beweisen.

Satz 2. (Weierstraßsches Approximationstheorem)
Sei $f \in C([0,1])$. Weiterhin sei $B_n \in C([0,1])$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$B_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \quad p \in [0,1]$$

(n-tes Bernsteinpolynom). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p\in[0,1]} |f(p) - B_n(p)| = 0.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie Satz 2. Verwenden Sie dazu die gleichmäßige Stetigkeit von f und das schwache Gesetz der großen Zahlen für Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen.

Vollversammlung

Aller Studierenden des Fachbereichs Mathematik

Dienstag, 5.6.2007 ab 16:15 Uhr in S103/23

Themen werden unter anderem sein:

- Stand der Verfassungsklage gegen Studiengebhren
- Verwendung von Studiengebhren
- Vernderung der Raumsituation am Fachbereich
- Hochschulwahlen
- ...