Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
Dr. M. Döring
B. Niese
T. Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 30./31.5.&1.6. 2007

Einführung in die Mathematische Statistik

3. Tutorium

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S_0, \dots, S_{2n}$ eine symmetrische Bernoulli-Irrfahrt, siehe Kapitel IV-5. Für die Verteilung der Zufallsvariable

$$X_n := |\{k \in \{1, \dots, 2n\} : \, S_k \geq 0 \text{ und } S_{k-1} \geq 0\}|$$

gilt

$$P(\{X_n = 2k\}) = P(\{S_{2k} = 0\}) \cdot P(\{S_{2n-2k} = 0\}), \qquad k = 0, \dots, n. \tag{1}$$

(Vgl. Satz 42, Kapitel IV-5.) Dieses Tutorium ist dem Beweis der Aussage (1) gewidmet, für den die geometrische Interpretation aus Bemerkung 33, Kapitel IV-5 hilfreich sein wird.

Zur Vorbereitung des Beweises werden wir die beiden folgenden Aussagen benötigen, die auch von eigenständigem Interesse sind.

Lemma 1. (Spiegelungsprinzip)
Sei $k_1, k_2, a, b \in \mathbb{N}$ mit $k_1 < k_2 \leq 2n$ und $a > 0$, $b > 0$. Die Anzahl der Pfade der Irrfahrt, die von Punkt $A = (k_1, a)$ zum Punkt $B = (k_2, b)$ verlaufen und für die $s_k = 0$ für mindestens ein $k \in \{k_1, \dots, k_2\}$ ist, entspricht der Anzahl der Pfade der Irrfahrt, die von Punkt $A' = (k_1, -a)$ zum Punkt B verlaufen.

Satz 1. (Ballot Theorem)
Sei $k, b \in \mathbb{N}$ und $0 < k \leq 2n$, $0 < b \leq k$. Die Anzahl der Pfade der Irrfahrt, die vom Punkt $A = (0, 0)$ zum Punkt $B = (k, b)$ verlaufen und für die $s_1 > 0, \dots, s_{k-1} > 0$ gilt, beträgt

$$\frac{b}{k} \cdot \binom{k}{(k+b)/2}.$$

(Hierbei ist der Binomialkoeffizient 0, falls $(k+b)/2 \notin \mathbb{N}$.)

Aufgabe 1. Beweisen Sie Lemma 1 und Satz 1. Verwenden Sie dabei Lemma 1 für den Beweis von Satz 1. In beiden Fällen sind Skizzen sehr hilfreich.

In einem zweiten Vorbereitungsschritt betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, daß die Irrfahrt im Zeitpunkt $2k$ den Wert Null annimmt, bzw. daß die Irrfahrt im Zeitpunkt $2k$ zum ersten Mal wieder zur Null zurückkehrt:

$$u_{2k} := P(\{S_{2k} = 0\}), \quad f_{2k} := P(\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2k-1} \neq 0, \, S_{2k} = 0\})$$

für $k = 0, \dots, n$.

Lemma 2.
Es gilt

$$P\left(\{S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k} \neq 0\}\right) = u_{2k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Lemma 3.
Es gilt

$$u_{2k} = \sum_{l=1}^{k} f_{2l} \cdot u_{2(k-l)}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie Lemma 2 und 3. Verwenden Sie dabei Satz 1 für den Beweis von Lemma 1. Skizzen sind wiederum hilfreich.

Aufgabe 3. Zeigen Sie (1). Verwenden Sie Lemma 2 für die Fälle $k = 0$ und $k = n$. Überlegen Sie sich weiterhin, von welcher Form die zu $\{X_n = 2k\}$ gehörenden Pfade sind und leiten Sie für $k = 1, \ldots, n-1$ die Gleichung

$$P(\{X_n = 2k\}) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} f_{2l} \cdot P(\{X_{n-l} = 2k - 2l\}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-k} f_{2l} \cdot P(\{X_{n-l} = 2k\})$$

her. Beweisen Sie nun (1) per Induktion über n. Benutzen Sie für den Induktionsschritt obige Gleichung und Lemma 3.

Aufgabe 4. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} P(\{X_n = 2k\}) = 1$.