3 Testtheorie

37. Beispiel Maschine zur Produktion von Gewinderingen.

Frage: Wird in der Produktion ein Nennmaß μ_0 für den Innendurchmesser eingehalten?

Daten: Innendurchmesser $x_1, \ldots, x_n$ von n Gewinderingen.

Annahme: Innendurchmesser sind Realisierungen von unabhängigen normalverteilten ZVen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

1. Fall Präzision der Maschine, gegeben durch σ^2, bekannt.

2. Fall Präzision der Maschine unbekannt.

Betrachte Testproblem, gegeben durch

- $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$,
- Hypothese $\emptyset \neq \Theta_0 \subsetneq \Theta$

  („der unbekannte Parameter liegt in Θ_0“, „$\vartheta \in \Theta_0$“),

Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist Realisierung von $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

38. Definition Verwerfungsbereich $R_n \in \mathfrak{B}_n$ definiert Signifikanztest zum Niveau $\alpha \in]0, 1[$ (für die Hypothese Θ_0), falls

$$\forall \vartheta \in \Theta_0 : P^\vartheta(\{X \in R_n\}) \leq \alpha.$$

Entscheidung: Lehne Hypothese genau dann ab, wenn $x \in R_n$.

Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art für jedes $\vartheta \in \Theta$ beschränkt durch α.

39. Bemerkung Um kleine Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art zu erreichen, sucht man Signifikanztest zu gegebenem Niveau α, dessen Verwerfungsbereich R_n „möglichst groß“ ist.

In dieser Vorlesung keine Optimalitätsaussagen.

40. Bemerkung Formulierung eines Testproblems

symmetrisch in Θ_0 (Hypothese) und $\Theta \setminus \Theta_0$ (Alternative).

Nicht so bei Signifikanztest.

41. Beispiel Signifikanztest zum Niveau α für

- „$\Theta_0 =$ schuldig“: Freispruch Schuldiger mit Wahrscheinlichkeit höchstens α.
- „$\Theta_0 =$ unschuldig“: Verurteilung Unschuldiger mit Wahrscheinlichkeit höchstens α.

42. Bemerkung In der Regel (und oBdA) Verwerfungsbereich von der Form

$$R_n := \{g_n \in K_n\}$$

mit Borel-meßbarer Abbildung $g_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $K_n \in \mathfrak{M}$.

Die ZV $g_n(X)$ heißt in diesem Kontext Teststatistik und K_n kritischer Bereich.

Entscheidung: Lehne Hypothese genau dann ab, wenn $g_n(x) \in K_n$.

Verwende „plausible" Teststatistik $g_n(X)$, deren Verteilungen $P^{\vartheta}_{g_n(X)}$ für $\vartheta \in \Theta_0$ (approximativ) bekannt sind.

43. Beispiel Normalverteilungsannahme mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Fortsetzung von Beispiel 37, 1. Fall.

Gegeben: $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Entscheide, ob der unbekannte Erwartungswert gleich μ_0 ist.

Formal: $\Theta := \mathbb{R}$, $P_{X_1}^{\mu} := \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ und $\Theta_0 := \{\mu_0\}$.

Setze

$$g_n(x) := \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Falls Hypothese korrekt, so ist $g_n(X)$ $\mathbf{N}(0, 1)$-verteilt.

Also für $k > 0$

$$
\begin{aligned}
P^{\mu_0}(\{|g_n(X)| \geq k\}) &= 1 - \Phi(k) + \Phi(-k) \\
&= 2(1 - \Phi(k)).
\end{aligned}
$$

Fazit: $R_n = \{|g_n| \geq k\}$ definiert genau dann einen Signifikanztest zum Niveau α, wenn $2(1 - \Phi(k)) \leq \alpha$, d.h.

$$k \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Klar: Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art sind monoton wachsend in k. Man wählt also

$$k = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Speziell für $\alpha = 0,05$ ergibt sich $k = 1,96\ldots$.

Entscheidung: Lehne Hypothese Θ_0 genau dann ab, wenn

$$\left|\overline{x}_n - \mu_0\right| \geq \sigma/\sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2).$$

Vgl. Satz 24.

Bez. zweiseitiger Gauß-Test.

Ausblick: einseitiges Testproblem gegeben durch $\Theta_0 :=]-\infty, \mu_0]$. Siehe

<u>ÜBUNG</u>.

44. Beispiel Fortsetzung von Bsp. 3, Geschlecht eines Neugeborenen. Widerlege die Annahme, daß Jungen und Mädchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden.

Verteilungsannahme: $P_{X_1}^{\vartheta} = \mathbf{B}(1, \vartheta)$ mit $\vartheta \in \Theta := \,]0, 1[$.

Hypothese: $\Theta_0 = \{1/2\}$.

Teststatistik

$$g_n(X) := \frac{\overline{X}_n - 1/2}{1/(2\sqrt{n})} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot 1/2}{1/2 \cdot \sqrt{n}}.$$

Beachte, daß $n = 25\,171\,123$. Also „ist" $g_n(X)$ bzgl. $P^{1/2}$ standard-normalverteilt.

Deshalb Gauß-Test, als asymptotischer α-Niveau-Test: Lehne Hypothese genau dann ab, wenn

$$\left|\overline{x}_n - 1/2\right| \geq 1/(2\sqrt{n}) \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Für $n = 25\,171\,123$ gilt $1/(2\sqrt{n}) = 9.9\ldots 10^{-5}$ und man erhält

α	$1/(2\sqrt{n}) \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$
10^{-2}	$2,56 \cdots \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$3,27 \cdots \cdot 10^{-4}$
10^{-20}	$9,30 \cdots \cdot 10^{-4}$

Für das empirische Mittel $\overline{x}_n = 0,4863\ldots$ der Daten gilt

$$|\overline{x}_n - 1/2| = 1,37 \cdots \cdot 10^{-2}.$$

45. Bemerkung Genauer zu Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art bei zweiseitigem Gauß-Test. Sei $\mu \neq \mu_0$ und

$$\mu_n := \sqrt{n} \cdot (\mu - \mu_0)/\sigma.$$

Dann ist $g_n(X)$ $\mathbf{N}(\mu_n, 1)$-verteilt bzgl. P^μ und

$$\begin{aligned}
&P^\mu(\{|g_n(X)| < k\}) \\
&\quad = \quad P^\mu(\{-k - \mu_n < g_n(X) - \mu_n < k - \mu_n\}) \\
&\quad = \quad \Phi(k - \mu_n) - \Phi(-k - \mu_n) =: a_n(\mu).
\end{aligned}$$

Es gilt:

(i) Für jedes $\mu \neq \mu_0$ konvergiert $(a_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ sehr schnell gegen Null, siehe <u>ÜBUNG</u>.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\mu\in\Theta\setminus\Theta_0} a_n(\mu) = 1 - \alpha.$$

Vgl. Seite 333.

46. Definition Operationscharakteristik f eines durch Verwerfungsbereich $R_n \in \mathfrak{B}_n$ gegebenen Tests

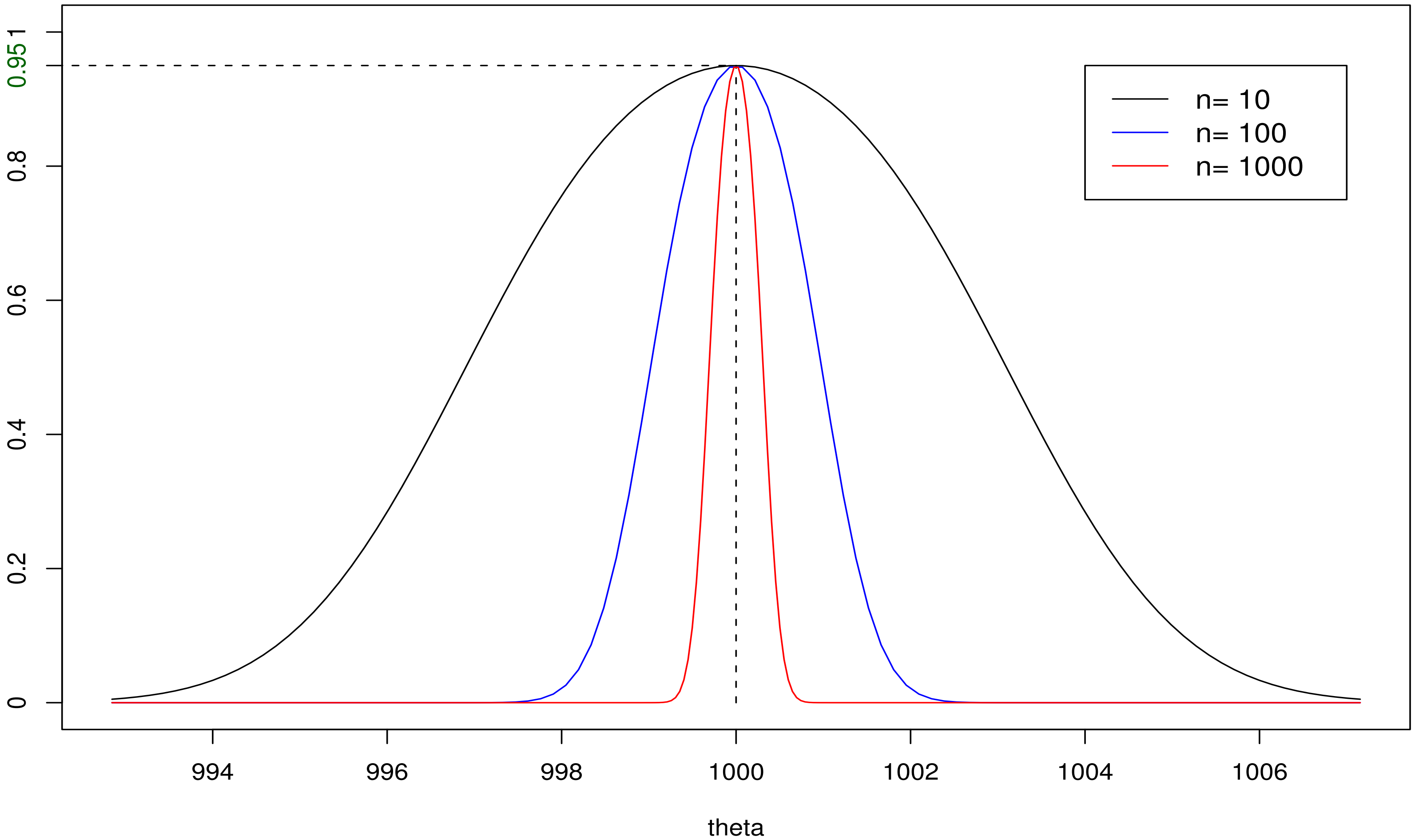
$$
\begin{aligned}
f : \Theta &\to [0,1] \\
\vartheta &\mapsto P^{\vartheta}(\{X \notin R_n\}).
\end{aligned}
$$

47. Bemerkung

(i) $f|_{\Theta \setminus \Theta_0}$: Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art.

(ii) Für Signifikanztest zum Niveau α: $f|_{\Theta_0} \geq 1 - \alpha$.

48. Beispiel Operationscharakteristiken des zweiseitigen Gauß-Tests für $\Theta_0 := \{1000\}$, $\sigma^2 := 25$ und $\alpha := 0,05$.



Nun: Normalverteilungsannahme mit unbekannter Varianz.

Fortsetzung von Bsp. 37, 2. Fall.

Gegeben: $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Entscheide, ob der unbekannte Erwartungswert gleich μ_0 ist.

Formal: $\Theta := \mathbb{R} \times]0, \infty[$, $P_{X_1}^{(\mu,\sigma)} := \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ und $\Theta_0 := \{\mu_0\} \times]0, \infty[$.

Betrachte die Teststatistik

$$g_n(X) := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{v_n(X)/n}},$$

wähle $t_{n-1;1-\alpha/2}$ als $(1-\alpha/2)$-Quantil der t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden und definiere

$$R_n := \{|g_n| \geq t_{n-1;1-\alpha/2}\}.$$

Vgl. Satz 32.

49. Satz zweiseitiger t-Test

Unter obiger Verteilungsannahme definiert der Verwerfungsbereich R_n einen Signifikanztest zum Niveau α.

Beweis. Wie in Bsp. 43. Unter Verwendung von Lemma 31. □

Nun: Zufallsexperimente mit Werten in einer endlichen Menge $M \subset \mathbb{R}^d$. Teste,

(i) ob Zufallsexperiment einer gegebenen Verteilung genügt,

(ii) ob die Komponenten eines vektorwertigen Zufallsexperimentes unabhängig sind.

50. Beispiel

(i) Teste, ob ein Würfel fair ist.

(ii) Teste, ob Einkommen und politische Präferenz unabhängig sind.

Im folgenden:

- $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$ endlich.
- $\Theta = \{(p_k)_{k\in M} \in [0,1]^M : \sum_{k\in M} p_k = 1\}$ Menge der Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf M.
- Für $\mathbf{p} = (p_k)_{k\in M} \in \Theta$ ist die Verteilung von X_1 unter $P^{\mathbf{p}}$ gegeben durch

$$P^{\mathbf{p}}_{X_1}(\{k\}) = p_k.$$

Der Einfachheit halber: $X_1, \ldots, X_n$ nehmen nur Werte aus M an.

Zunächst Fragestellung (i), also

$$\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$$

für feste Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbf{p}^0 \in \Theta$ mit $p^0_m > 0$ für alle $m \in M$.

51. Beispiel $M := \{1, \dots, 6\}$ und $p^0_k := 1/6$ für $k \in M$ bei der Frage, ob Würfel fair. Siehe auch Bsp. 44.

Im folgenden oBdA $M = \{1, \dots, m\}$ mit $m \geq 2$.

Betrachte die absoluten Häufigkeiten der Werte $1, \ldots, m$ in Stichprobe. Definiere $H : M^n \longrightarrow \mathbb{N}_0^m$ durch

$$H_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{k\}}(x_i)$$

für $k = 1, \ldots, m$.

Naheliegend: Verwerfung der Hypothese Θ_0, falls „Abstand“ von $1/n \cdot H(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{p}^0$ „groß“.

Dazu: Bestimmung der Verteilung des Zufallsvektors $H(X)$.

52. Beispiel Für $M := \{1, 2\}$ gilt

$$H_1(X) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{1_{\{1\}}(X_i)}_{=:X_i'} .$$

Aus $P^{\mathbf{p}}_{X_1'} = \mathbf{B}(1, p_1)$ folgt $H_1(X) \sim \mathbf{B}(n, p_1)$ bzgl. $P^{\mathbf{p}}$.
Klar: $H_2(X) = n - H_1(X)$. Also für $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = (k, n-k)\}) = \binom{n}{k} \cdot p_1^k \cdot p_2^{n-k}.$$

53. Bemerkung Analog folgt allgemein $H_k(X) \sim \mathbf{B}(n, p_k)$ bzgl. $P^{\mathbf{p}}$. Beachte: die Komponenten $H_k(X)$ des Zufallsvektors $H(X)$ sind nicht unabhängig.

54. Satz Für $\mathbf{p} \in \Theta$ und $h \in \mathbb{N}_0^m$ gilt

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = n! \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{h_k}}{h_k!}$$

falls $\sum_{k=1}^{m} h_k = n$.

Andernfalls gilt $P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = 0$.

Beweis. Klar: $P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = 0$, falls $\sum_{k=1}^{m} h_k \neq n$.

Im folgenden gelte $\sum_{k=1}^{m} h_k = n$.

Für $x \in M^n$ mit $H(x) = h$

$$P^{\mathbf{p}}(\{X = x\}) = p_{x_1} \cdots p_{x_n} = \prod_{k=1}^{m} p_k^{h_k}.$$

Anzahl Stichproben mit absoluten Häufigkeiten h_k

$$\begin{aligned}
&|\{x \in M^n : H(x) = h\}| \\
&\quad = \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n - h_1}{h_2} \cdots \binom{n - (h_1 + \cdots + h_{m-1})}{h_m} \\
&\quad = \frac{n!}{h_1! \cdots h_m!}.
\end{aligned}$$

Fazit:

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = \sum_{x \in M^n,\ H(x) = h} P^{\mathbf{p}}(\{X = x\}) = n! \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{h_k}}{h_k!}$$

55. Definition m-dimensionaler Zufallsvektor Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ multinomialverteilt mit Parametern $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{p} \in [0,1]^m$, wobei $\sum_{k=1}^m p_k = 1$, falls

$$P(\{Y = y\}) = \begin{cases} n! \cdot \prod_{k=1}^m \frac{p_k^{y_k}}{y_k!}, & \text{falls } y \in \mathbb{N}_0^m \text{ mit } \sum_{k=1}^m y_k = n \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Bez.: $Y \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$.

56. Bemerkung Satz 54 zeigt: Bzgl. $P^{\mathbf{p}}$ gilt

$H(X) \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$.

57. Beispiel 12 Würfe eines fairen Würfels. Für $n := 12$, $m := 6$ und $\mathbf{p} := (1/6, \ldots, 1/6)$

$$\mathbf{M}(12, 6, \mathbf{p})(\{(3, 0, 0, 2, 6, 1)\})$$
$$= \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 6!} \cdot 6^{-12} = 2,54 \ldots 10^{-5}$$

und

$$\mathbf{M}(12, 6, \mathbf{p})(\{(2, 2, 2, 2, 2, 2)\})$$
$$= \frac{12!}{2^6} \cdot 6^{-12} = 3,43 \ldots 10^{-3}.$$

58. Bemerkung Satz 54 ermöglicht prinzipiell die Konstruktion eines Signifikanztests zum Niveau α für $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$: Wähle (möglichst kleine endliche) Menge $A \subset \mathbb{N}_0^m$ mit

$$P^{\mathbf{p}^0}(\{H(X) \in A\}) \geq 1 - \alpha$$

und verwende den Verwerfungsbereich

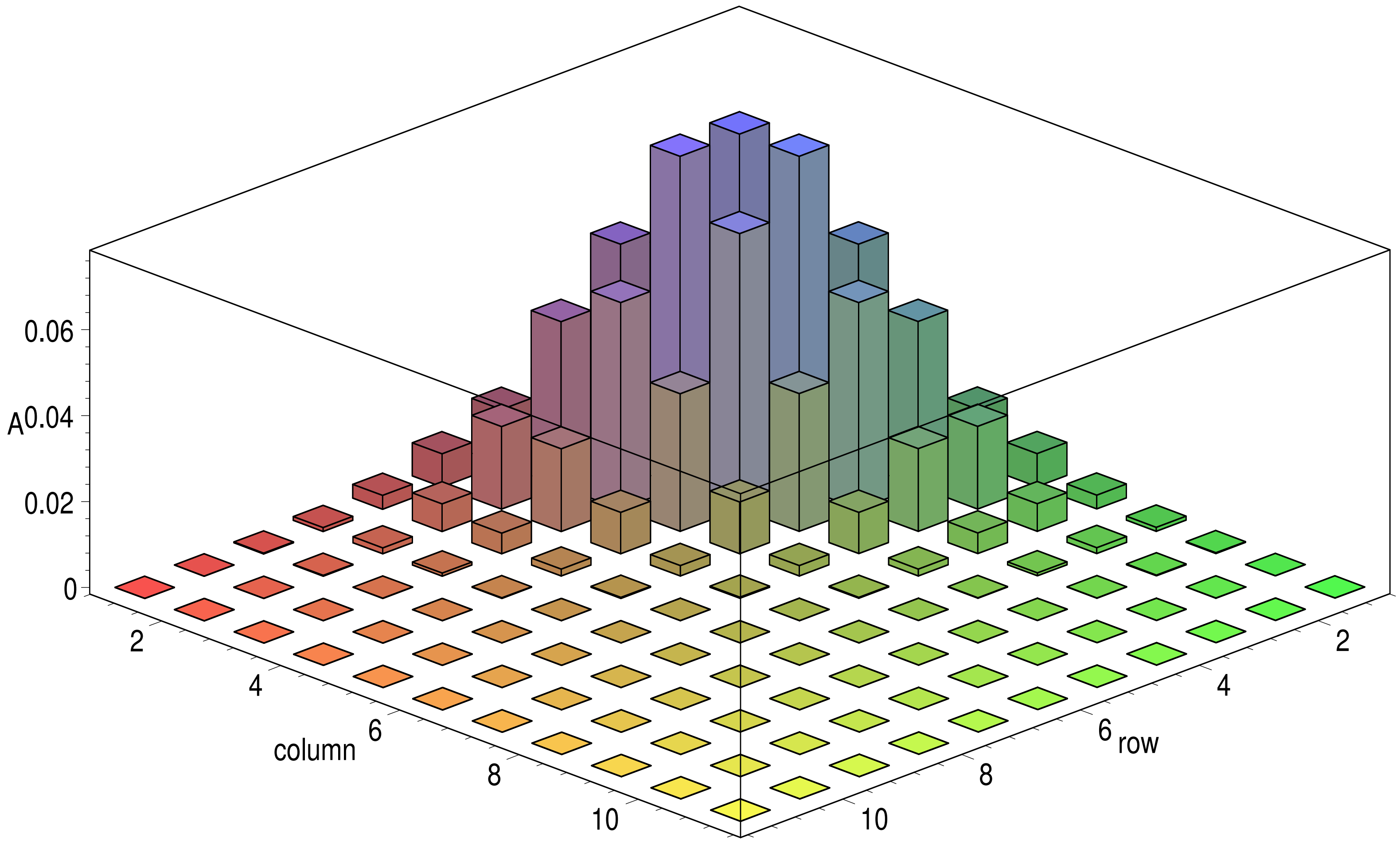
$$R_n := \{H \notin A\}.$$

Allg. Prinzip bei diskreten Teststatistiken.

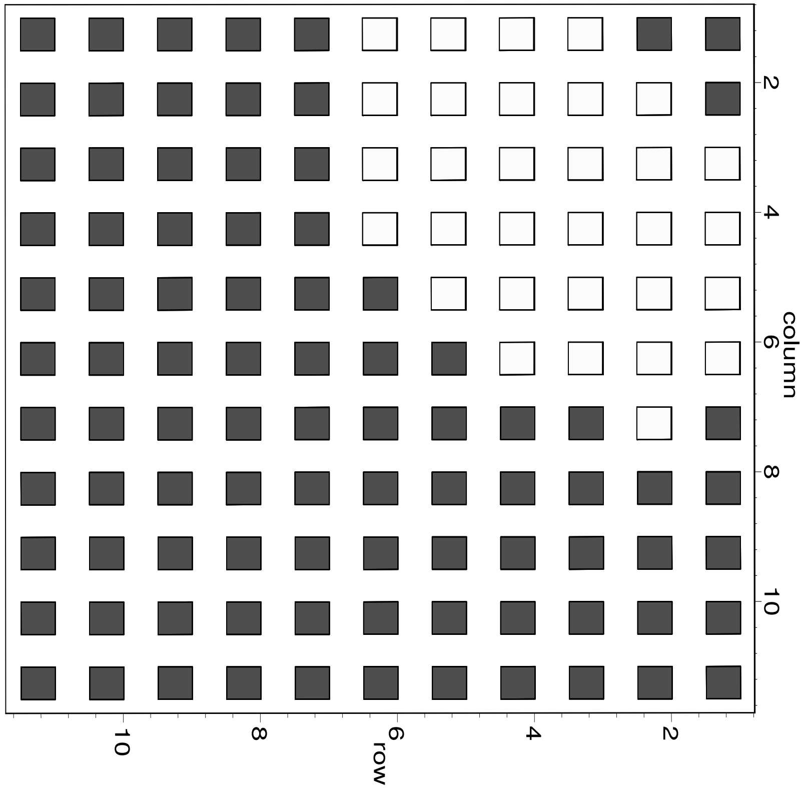
59. Beispiel Multinomialverteilung mit $m = 3$. Dargestellt ist

$$(h_1, h_2) \mapsto M(n, m, \mathbf{p})(\{(h_1, h_2, n - (h_1 + h_2)\})$$

für $n = 10$, $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2)$.



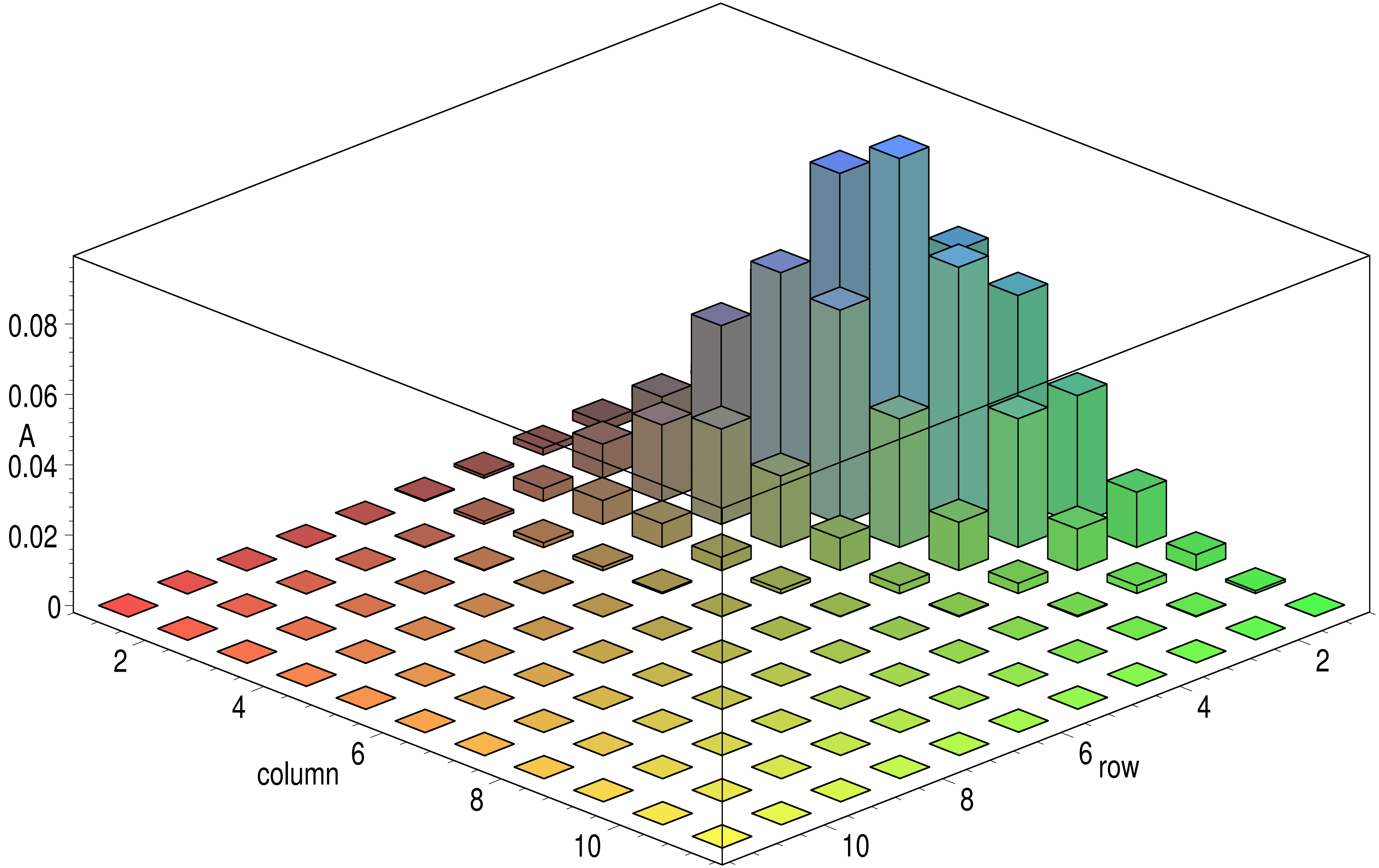
Eine optimale Wahl des Verwerfungsbereiches für $\alpha = 0,05$.



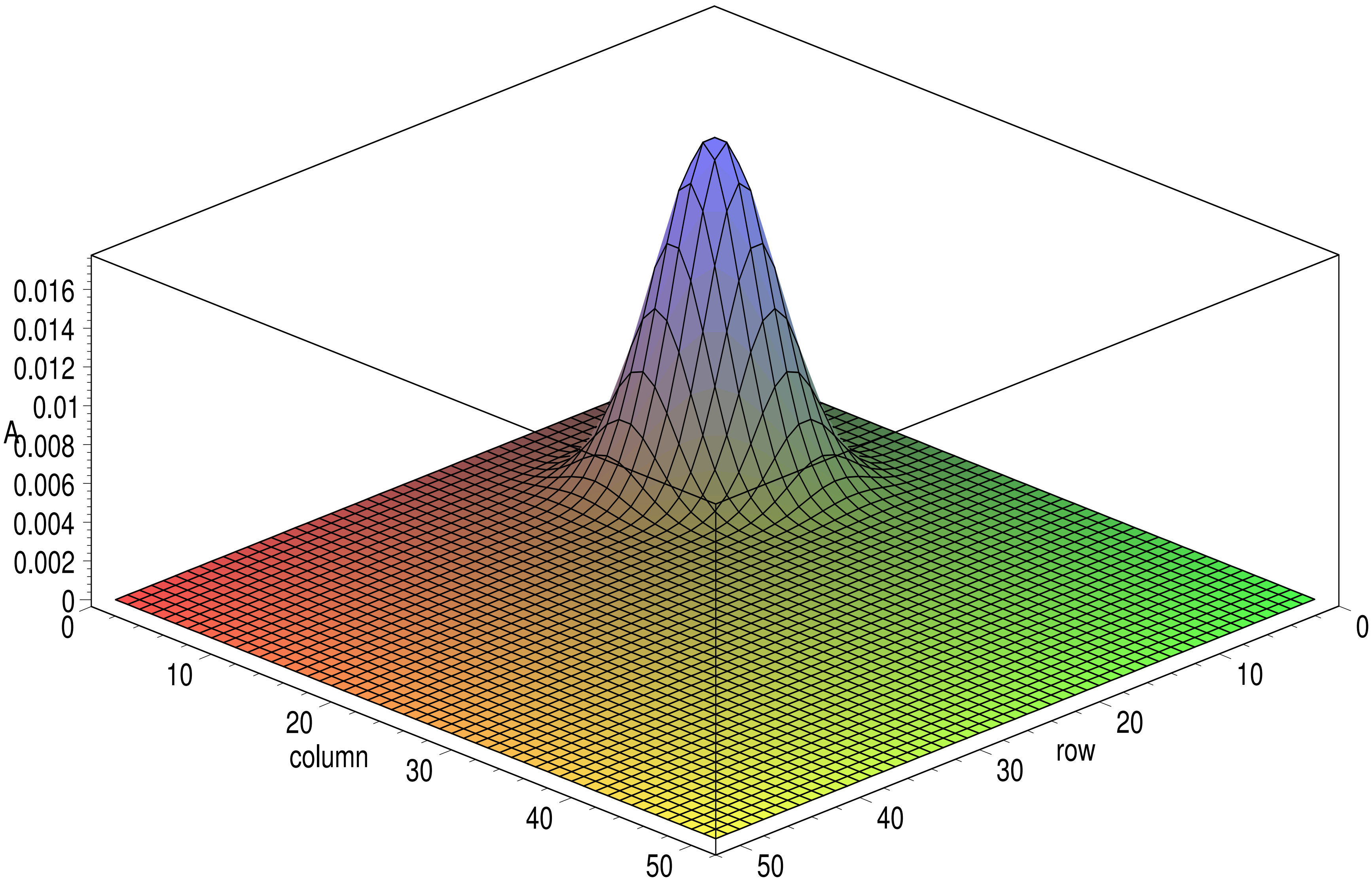
Verwirf die Hypothese genau dann, wenn (h_1, h_2) „schwarz markiert".

Auf diese Weise: $P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = 0,0488\ldots$.

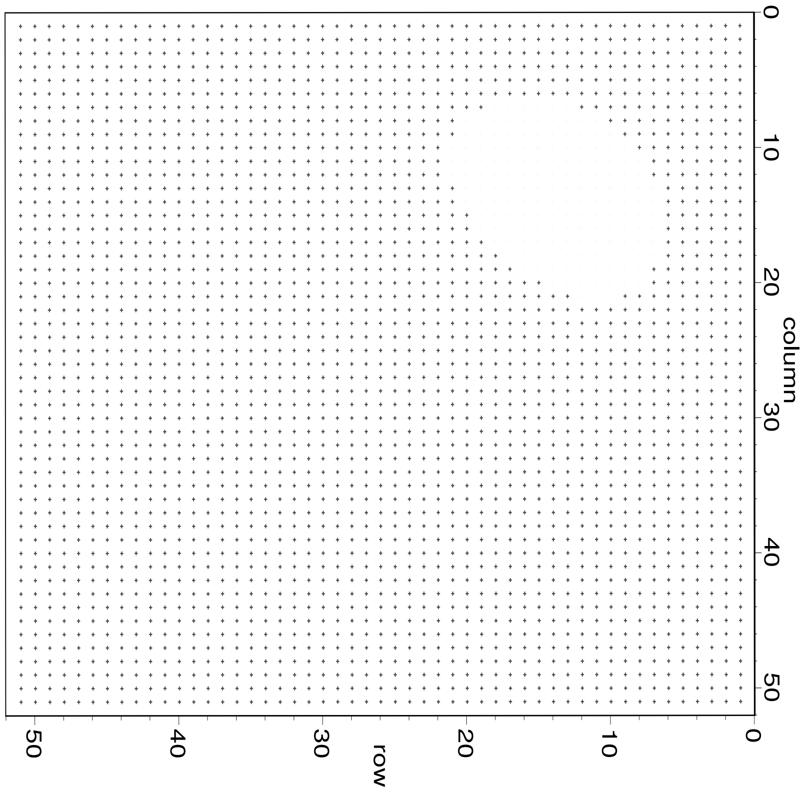
Multinomialverteilung: $n = 10, m = 3, \mathbf{p} = (1/8, 3/8, 1/2)$



Multinomialverteilung: $n = 50$, $m = 3$, $\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/2)$. (Mit Interpolation.)



Eine optimale Wahl des Verwerfungsbereiches für $\alpha = 0,05$.



Verwirf die Hypothese genau dann, wenn (h_1, h_2) „schwarz markiert".

Auf diese Weise: $P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = 0,0497\ldots.$

Nachteile der Vorgehensweise gem. Bem. 58: Abhängigkeit von n, m und $\mathbf{p}^0$ und hoher Rechenaufwand, falls n groß.

Deshalb: asymptotischer α-Niveau-Test, siehe auch Seite 383.

Beachte: H und X hängen von n ab.

Definiere Teststatistik $Q(H(X))$ mit $Q : \mathbb{N}_0^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$Q(h) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(h_k - n \cdot p_k^0)^2}{n \cdot p_k^0}.$$

Untersuche Konvergenz der Verteilung von $Q(H(X))$ bzgl. $P^{\mathbf{p}^0}$ für $n \longrightarrow \infty$.

Motivation (partiell): starkes Gesetz der großen Zahlen zeigt, daß $H_k(X)/n$ $P^{\mathbf{p}^0}$-f.s. gegen $P^{\mathbf{p}^0}(\{X_1 = k\}) = p_k^0$ konvergiert.

60. Definition Sei $d \in \mathbb{N}$. ZV Y mit Dichte

$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{d/2} \cdot \Gamma(d/2)} \cdot x^{d/2-1} \cdot \exp(-x^2/2),$$

falls $x > 0$, und $f_Y(x) = 0$ andernfalls heißt χ^2-verteilt mit d Freiheitsgraden.

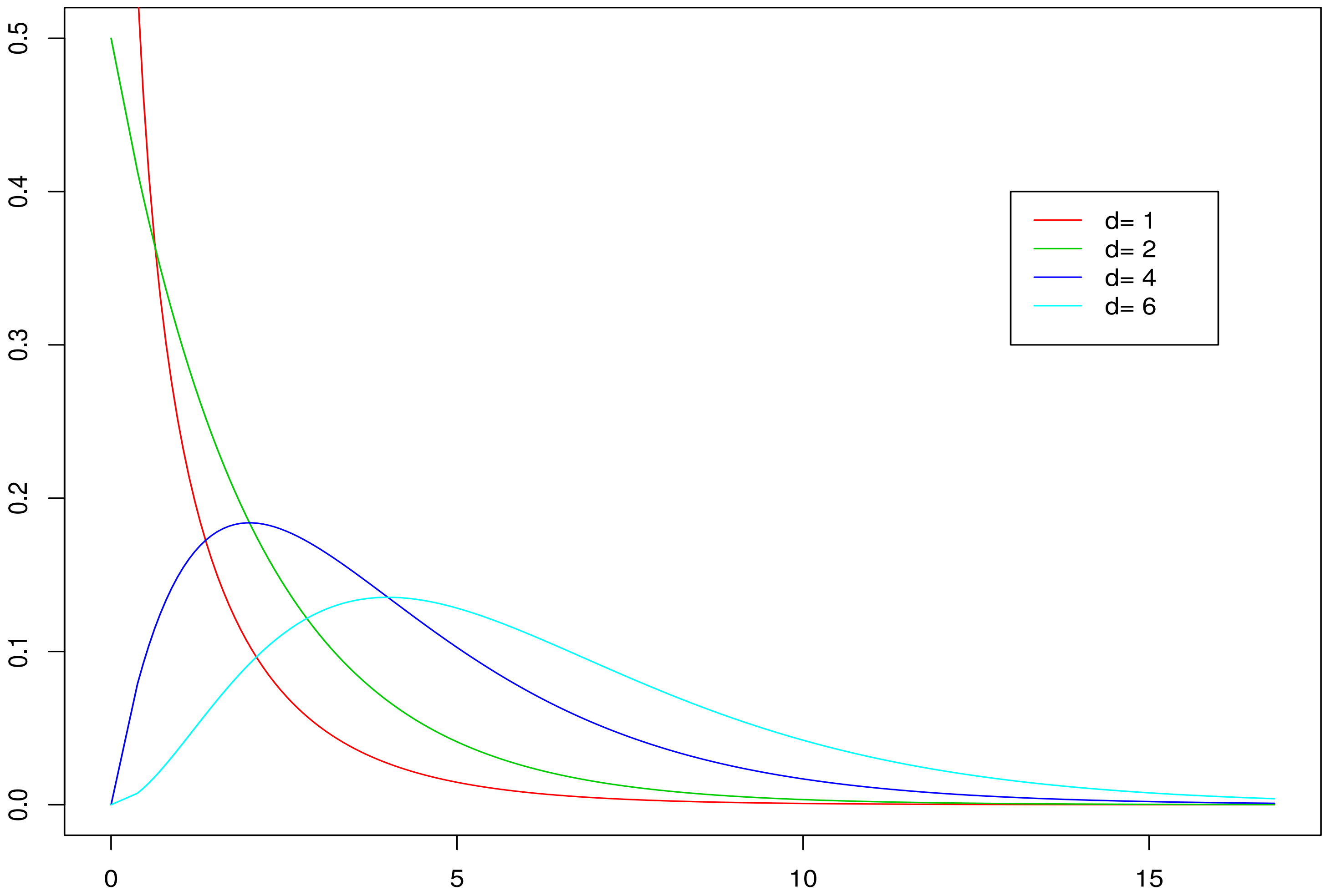
Bez.: $Y \sim \chi^2_d$.

61. Bemerkung Für iid-ZVen $Y_1, \ldots, Y_d$ mit $Y_1 \sim \mathbf{N}(0,1)$ und

$$Y := \sum_{i=1}^{d} Y_i^2$$

gilt $Y \sim \chi^2_d$. Siehe Krengel (1998, §13).

62. Beispiel Dichte von χ^2_d für $d = 1, 2, 4, 6.$



63. Satz Gelte

$$Z_n \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$$

für $m \geq 2$ und $\mathbf{p} \in [0,1]^m$, wobei $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$, sowie

$$Y \sim \chi^2_{m-1}.$$

Dann

$$Q(Z_n) \xrightarrow{\mathsf{d}} Y.$$

Beweis. Siehe Krengel (1998, §13). □

Wähle $\chi^2_{m-1;1-\alpha}$ als $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $m-1$ Freiheitsgraden und definiere

$$R_n := \{Q \circ H \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha}\}.$$

Vgl. Satz 32.

64. Satz χ^2-Anpassungstest

Unter der Verteilungsannahme von Seite 393 definiert der Verwerfungsbereich R_n einen Signifikanztest zum asymptotischen Niveau α für $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = \alpha.$$

Beweis. Sei F die Verteilungsfunktion von χ^2_{m-1}. Es gilt

$$\{X \in R_n\} = \{Q(H(X)) \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha}\}.$$

Da F stetig, folgt mit Satz 63

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = 1 - F(\chi^2_{m-1,1-\alpha}) = \alpha.$$

$\square$

65. Beispiel Fortsetzung von Bsp. 59 mit $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$ für $m := 3$ und für $\mathbf{p}^0 := (1/4, 1/4, 1/2)$.

Wähle $\alpha := 0,05$. Somit $\chi^2_{m-1;1-\alpha} = 5,99\ldots$.

Für $n := 10$ und $H(x_1, \ldots, x_n) := (0, 1, 9)$ ergibt sich

$$Q(H(x_1, \ldots, x_n)) = 33/5 = 6,6 \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha},$$

so daß die Hypothese Θ_0 verworfen wird.

Für $n := 50$ und $H(x_1, \ldots, x_n) := (9, 15, 26)$ ergibt sich

$$Q(H(x_1, \ldots, x_n)) = 38/25 = 1,52 < \chi^2_{m-1;1-\alpha},$$

so daß die Hypothese Θ_0 nicht verworfen wird.

66. Bemerkung Anwendung des χ^2-Anpassungstests im Falle absolutstetiger Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$.

Hypothese: unbekannte Verteilung von X_1 ist gleich P_0.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ und p.d. Mengen $B_k \in \mathfrak{B}_d$ mit $\bigcup_{k=1}^m B_k = \mathbb{R}^d$. Definiere

$$X_i' := \sum_{k=1}^{m} k \cdot 1_{B_k}(X_i)$$

und betrachte $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$ mit

$$p_k^0 := P_0(B_k).$$

67. Beispiel Frage: Liefert Ihr Zufallszahlengenerator auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen?

Also $P_0 := \mathbf{U}([0,1])$. Wähle

$$B_1 := \left]-\infty, 1/m\right], \qquad B_m := \left]1 - 1/m, \infty\right[$$

und für $k = 2, \ldots, m-1$

$$B_k := \left](k-1)/m, k/m\right].$$

Somit für $k = 1, \ldots, m$

$$p_k^0 := P_0(B_k) = 1/m.$$

Nun Fragestellung (ii):

Sind die Komponenten eines 2-dimensionalen Zufallsvektors unabhängig?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$M = \underbrace{\{1, \ldots, m^{(1)}\}}_{=:M^{(1)}} \times \underbrace{\{1, \ldots, m^{(2)}\}}_{=:M^{(2)}}$$

Also wie oben

$$\Theta = \{\mathbf{p} = (p_{k,\ell})_{(k,\ell)\in M} \in [0,1]^M : \sum_{k,\ell \in M} p_{k,\ell} = 1\},$$

$$P_{X_1}^{\mathbf{p}}(\{(k,\ell)\}) = p_{k,\ell}$$

Hier

$$\Theta_0 = \{\mathbf{p} \in \Theta : \ \exists \text{ W'funktionen } \mathbf{p}^{(i)} \text{ auf } M^{(i)} :$$
$$\forall (k,\ell) \in M : p_{k,\ell} = p_k^{(1)} \cdot p_\ell^{(2)}\}$$

Wie oben $H : M^n \longrightarrow \mathbb{N}_0^{m^{(1)} \times m^{(2)}}$ Matrix der absoluten Häufigkeiten (Kontingenztafel).

Bez.: für $h \in \mathbb{N}_0^{m^{(1)} \times m^{(2)}}$, $k \in M^{(1)}$ und $\ell \in M^{(2)}$

$$h_{\bullet,\ell} = \sum_{k=1}^{m^{(1)}} h_{k,\ell}, \qquad h_{k,\bullet} = \sum_{\ell=1}^{m^{(2)}} h_{k,\ell}.$$

Analog für ZVen.

68. Beispiel Siehe Lehn, Wegmann (2004, p. 172). Hier gilt $m^{(1)} = 5, m^{(2)} = 4$.

Definiere Teststatistik $Q(H(x)) = Q_n(H_n(x))$ mit $Q : \mathbb{N}_0^{m^{(1)} \times m^{(2)}} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$Q(h) = \sum_{k=1}^{m^{(1)}} \sum_{\ell=1}^{m^{(2)}} \frac{(h_{k,\ell} - h_{k,\bullet} \cdot h_{\bullet,\ell}/n)^2}{h_{k,\bullet} \cdot h_{\bullet,\ell}/n}.$$

Motivation (partiell): starkes Gesetz der großen Zahlen zeigt

- $H_{k,\ell}(X)/n$ konvergiert $P^{\mathbf{p}}$-f.s. gegen $p_{k,\ell}$,
- $H_{k,\bullet}(X) \cdot H_{\bullet,\ell}(X)/n^2$ konvergiert $P^{\mathbf{p}}$-f.s. gegen $p_{k,\bullet} \cdot p_{\bullet,\ell}$.

Für $\mathbf{p} \in \Theta_0$ gilt $p_{k,\ell} = p_{k,\bullet} \cdot p_{\bullet,\ell}$, und somit konvergiert $H_{k,\ell}(X)/n - H_{k,\bullet}(X) \cdot H_{\bullet,\ell}(X)/n^2$ $P^{\mathbf{p}}$-f.s. gegen 0.

69. Satz Für $\mathbf{p} \in \Theta_0$ gilt

$$Q_n(H_n(X)) \xrightarrow{\mathsf{d}} Y,$$

wobei $Y \sim \chi^2_{(m^{(1)}-1)\cdot(m^{(2)}-1)}$.

Beweis. Siehe Krengel (1998, §13). $\square$

Wähle $c = \chi^2_{(m^{(1)}-1)\cdot(m^{(2)}-1);1-\alpha}$ als $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $(m^{(1)}-1)\cdot(m^{(2)}-1)$ Freiheitsgraden und definiere

$$R_n = \{Q_n \circ H_n \geq c\}$$

70. Satz χ^2-Unabhängigkeitstest

Unter obigen Verteilungsannahmen definiert der Verwerfungsbereich R_n einen Signifikanztest zum asymptotischen Niveau α, d.h.

$$\forall \mathbf{p} \in \Theta_0 : \lim_{n\to\infty} P^{\mathbf{p}}(\{X \in R_n\}) = \alpha.$$

Beweis. Wie für Satz 64. $\square$

71. Beispiel Fortsetzung von Bsp. 68 mit $\alpha = 0,1$.

Es folgt $c = 21,06$, und ferner gilt $Q(H(x)) = 14,40$, so daß Θ_0 nicht verworfen wird.