Kap. VII Schätz- und Testprobleme

1. Statistische Modellbildung und statistisches Entscheiden
2. Schätztheorie
3. Testtheorie
4. Lineare Regression

1 Statistische Modellbildung und statistisches Entscheiden

Fortan bezeichnen wir mit $\mathbf{B}(n,p), \mathbf{N}(\mu,\sigma^2), \ldots$ auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}_1$.

Grundform wichtiger statistischer Fragestellungen:

(i) Zufallsexperiment mit unbekannter Verteilung Q

(ii) Verteilungsannahme: $Q \in \mathfrak{P}$ für eine Menge $\mathfrak{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{B}_d$.

(iii) (a) Schätzproblem. Gegeben: Abbildung $\eta : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Bestimme $\eta(Q)$.

(b) Testproblem. Gegeben $\emptyset \neq \mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}$.
Entscheide, ob $Q \in \mathfrak{P}_0$.

(iv) Verfügbar: Stichprobe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ aus n-maliger unabhängiger Wiederholung des Zufallsexperimentes.

1. Beispiel Geschlecht eines Neugeborenen ($1 \triangleq$ W, $0 \triangleq$ M), siehe Bsp. II.13. Hier $d = 1$ und

(i) $Q = \mathbf{B}(1, p)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit, daß Neugeborenes weiblich.

(ii) $\mathfrak{P} := \{\mathbf{B}(1, p) : p \in]0, 1[\}$

(iii) (a) $\eta(\mathbf{B}(1, p)) := p$

(b) $\mathfrak{P}_0 := \{\mathbf{B}(1, 1/2)\}$ oder

$\mathfrak{P}_0 := \{\mathbf{B}(1, p) : p < 1/2\}$

(iv) Geschlecht bei n Lebendgeburten

Bei Stichprobenumfang $n = 25\,171\,123$ scheint „verläßliche“ Bestimmung von $\eta(Q)$ und Entscheidung, ob $\eta(Q) \in \mathfrak{P}_0$ möglich.

Empirisches Mittel

$$\overline{x}_n := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{12\,241\,392}{25\,171\,123} = 0,4863\,\ldots$$

legt nahe, daß $\eta(Q)$ ungefähr $0,48$ beträgt und $Q \neq \mathbf{B}(1, 1/2)$ gilt.

2. Bemerkung

- Studiert werden auch Varianten dieser Grundform (z.B. abhängige Beobachtungen, $\mathbb{R}^k$-wertige Abbildungen η).
- Abstrakte Formulierung und Theorie in der Mathematischen Statistik (Gütekriterien, Optimalitätsaussagen, Quantifizierung von Risiken).
- Oft ist $\mathfrak{P}$ in natürlicher Weise parametrisiert, siehe Beispiel 1.

Fortan, der Einfachheit halber, $d = 1$.

Statistisches Experiment formal:

(i) Familie $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen

(ii) Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß

für alle $\vartheta \in \Theta$:

- $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig bzgl. P^ϑ
- $P^\vartheta_{X_1} = \ldots = P^\vartheta_{X_n}$.

Ferner $P^\vartheta_{X_1} \neq P^{\vartheta'}_{X_1}$ für $\vartheta, \vartheta' \in \Theta$ mit $\vartheta \neq \vartheta'$.

Terminologie: $\mathbb{R}^n$ Stichprobenraum, Θ Parameterraum.

Verteilungsannahme: $\mathfrak{P} = \{P^\vartheta_{X_1} : \vartheta \in \Theta\}$.

Konkrete Gestalt von Ω, $\mathfrak{A}$ und den W'maßen P^ϑ irrelevant.

Annahme: Daten sind Realisierung

$$x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$$

der ZVen $X_1, \dots, X_n$ für ein $\omega \in \Omega$.

Schätzproblem definiert durch

$$\gamma : \Theta \longrightarrow \mathbb{R},$$

also $\eta(P_{X_1}^{\vartheta}) = \gamma(\vartheta)$. Eine Borel-meßbare Abbildung $g_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in diesem Kontext Schätzfunktion.

Schätze $\gamma(\vartheta)$ durch

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = g_n(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

Ziel: Für jedes $\vartheta \in \Theta$ liegen die Werte der Zufallsvariable

$$g_n(X_1, \ldots, X_n)$$

auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P^{\vartheta})$ „nahe" bei $\gamma(\vartheta)$.

Testproblem definiert durch

$$\emptyset \neq \Theta_0 \subsetneq \Theta,$$

also $\mathfrak{P}_0 = \{P_{X_1}^{\vartheta} : \vartheta \in \Theta_0\}$. Eine Borel-Menge $R_n \in \mathfrak{B}_n$ heißt in diesem Kontext Verwerfungsbereich. Lehne die Hypothese Θ_0 (bzw. „$\vartheta \in \Theta_0$“) genau dann ab, wenn

$$(x_1, \ldots, x_n) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in R_n.$$

Ziel: Für jedes $\vartheta \in \Theta_0$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P^{\vartheta}(\{(X_1, \ldots, X_n) \in R_n\})$$

des Fehlers 1. Art „klein", und für jedes $\vartheta \in \Theta \backslash \Theta_0$ ist die Wahrscheinlichkeit

$$P^{\vartheta}(\{(X_1, \ldots, X_n) \notin R_n\})$$

des Fehlers 2. Art „klein". Siehe jedoch Beispiel 43 ff.

Bei Schätz- und Testproblem jeweils worst case-Analyse über alle $\vartheta \in \Theta$.

3. Beispiel Geschlecht eines Neugeborenen. Hier $\Theta :=]0,1[$, und für $p \in \Theta$ ist $P_{X_1}^p := \mathbf{B}(1,p)$.

- Schätzproblem: $\gamma(p) := p$,
- Testproblem: $\Theta_0 := \{1/2\}$ oder $\Theta_0 :=]0, 1/2[$.

Als Schätzfunktion für γ bereits betrachtet

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) := \overline{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Naheliegend: Verwerfungsbereiche R_n für $\Theta_0 := \{1/2\}$ von der Form

$$R_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |g_n(x) - 1/2| \geq k_n\}.$$

4. Beispiel Analog: Halbwertszeit. Hier $\Theta :=]0, \infty[$, und für $\lambda \in \Theta$ ist $P_{X_1}^{\lambda} := \mathbf{Exp}(\lambda)$.

- Schätzproblem: $\gamma(\lambda) := \ln(2)/\lambda$.
- Testproblem: $\Theta_0 := \{\ln(2)/\lambda_0\}$.

Ausblick: nicht-parametrische Statistik.