3 Zentraler Grenzwertsatz

Starkes Gesetz der großen Zahlen: fast sichere Konvergenz der Realisierungen einer Folge von ZVen.

Nun: Konvergenz der Verteilungen einer Folge von ZVen.

Bezeichnung $\mathfrak{C}_X = \{x \in \mathbb{R} : F_X \text{ stetig in } x\}$ Menge der Stetigkeitspunkte der Verteilungsfunktion X.

39. Beispiel

$$X \sim \mathbf{U}([a, b]) \Rightarrow \mathfrak{C}_X = \mathbb{R}$$

$$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathfrak{C}_X = \mathbb{R}$$

$$X \sim \mathbf{B}(n, p) \wedge p \in \,]0, 1[\, \Rightarrow \mathfrak{C}_X = \mathbb{R} \setminus \{0, \ldots, n\}$$

40. Definition Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ZVen konvergiert in Verteilung gegen eine ZV X, falls

$$\forall x \in \mathfrak{C}_X : \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Bez.: $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$

41. Beispiel Für $X_n = a_n$ und $X = a$ mit $a, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$X_n \xrightarrow{\text{d}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Beachte: Aus $a_n > a$ folgt $F_{X_n}(a) = 0$, während $F_X(a) = 1$.

42. Beispiel

(i) Satz III.37: Gelte $X_n \sim \mathbf{B}(n, p_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$ sowie $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$. Dann $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

(ii) <u>ÜBUNG</u> M:H9, WInf:H9: Gelte $X_n \sim \mathbf{H}(n, n_0(n), k)$ mit $n_0(n) \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lim_{n\to\infty} n_0(n)/n = p \in \left]0, 1\right[$ sowie $X \sim \mathbf{B}(k, p)$. Dann $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

(iii) <u>ÜBUNG</u>: Sei Y_n Anzahl der Führungszeitpunkte bei symmetrischer Bernoulli-Irrfahrt der Länge n, $X_n = Y_n/n$ und X Arcussinus-verteilt, d.h.

$$F_X(x) = 2/\pi \cdot \arcsin(\sqrt{x})$$

für $x \in [0,1]$. Dann $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

(iv) <u>Tutorium</u> T2:3: Satz von de Moivre-Laplace. Gelte

$Y_n \sim \mathbf{B}(n, p)$ mit $p \in \,]0, 1[$ und

$$X_n := \frac{Y_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}}$$

sowie $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Dann $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

43. Bemerkung Es existiert eine Metrik ρ auf

$$\mathbb{M} := \{Q : Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathfrak{B}_1\},$$

so daß

$$X_n \xrightarrow{\text{d}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(P_{X_n}, P_X) = 0,$$

siehe Vorlesung „Probability Theory“.

44. Lemma Falls F_X stetig und $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X_n}(x) - F_X(x)| = 0.$$

Beweis. <u>ÜBUNG</u> □

45. Lemma Falls F_X stetig und $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$:

$$\forall A \in \mathfrak{M} : \lim_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = P(\{X \in A\}).$$

Beweis. Gilt nach Defi nition für $A =]-\infty, x]$. Für $A = \{x\}$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(\{X_n \in A\}) &\leq P(\{x - \varepsilon < X_n \leq x\}) \\ &= P(\{X_n \leq x\}) - P(\{X_n \leq x - \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Somit

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) \leq F_X(x) - F_X(x - \varepsilon).$$

Aufgrund der Stetigkeit von F_X in x folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n \in A\}) = 0 = P(\{X \in A\}).$$

Im folgenden

- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $X_1 \in \mathfrak{L}_2$ mit $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in \,]0,\infty[$
- $\mu := \mathrm{E}(X_1)$
- $S_n^* := \dfrac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}}$ standardisierte Summenvariablen
- Z standard-normalverteilte Zufallsvariable

Es gilt $\mathrm{E}(S_n^*) = 0$ und $\mathrm{Var}(S_n^*) = 1$.

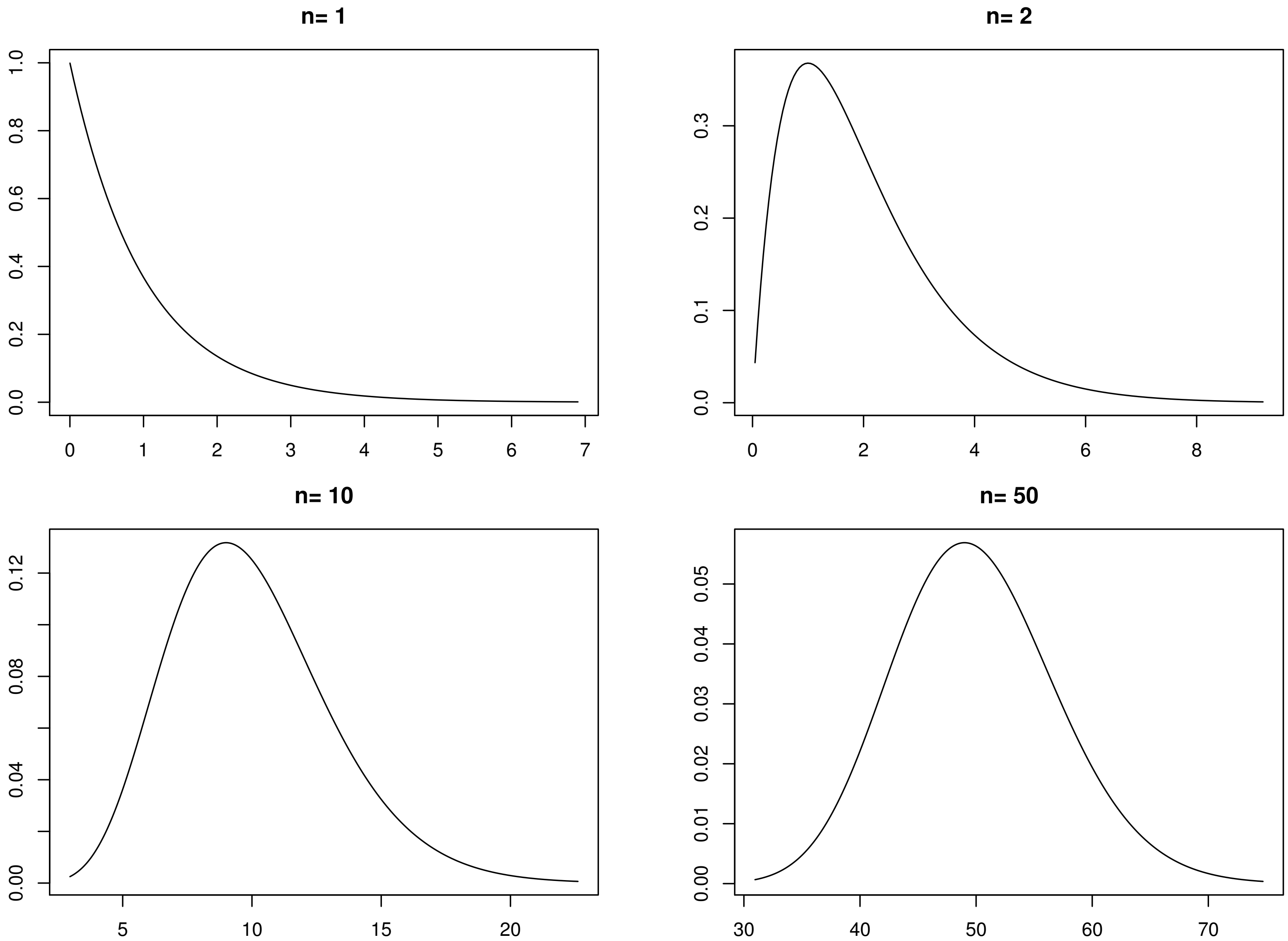
46. Satz Zentraler Grenzwertsatz

Für jede Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ wie oben gilt $S_n^* \xrightarrow{\text{d}} Z$.

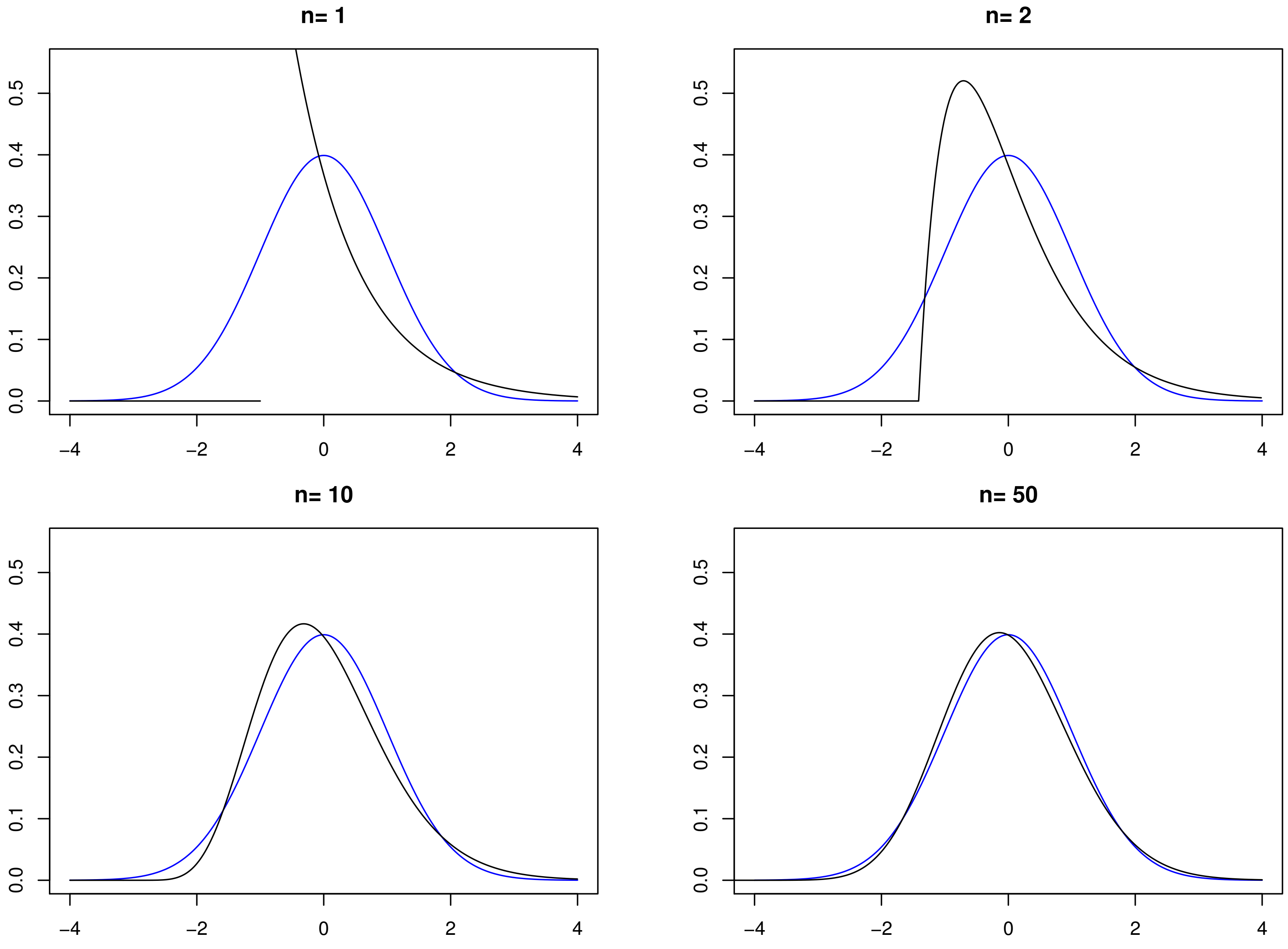
Beweis. Irle (2001, Kap. 12) und Vorlesung „Probability Theory“. □

47. Bemerkung Der zentrale Grenzwertsatz besagt grob: „Ein Gesamteffekt, der Summe vieler kleiner zentrierter unabhängiger Einzeleffekte ist, ist näherungsweise normalverteilt."

48. Beispiel Dichten von Summen n unabhängiger $\mathbf{Exp}(1)$-verteilter ZVen



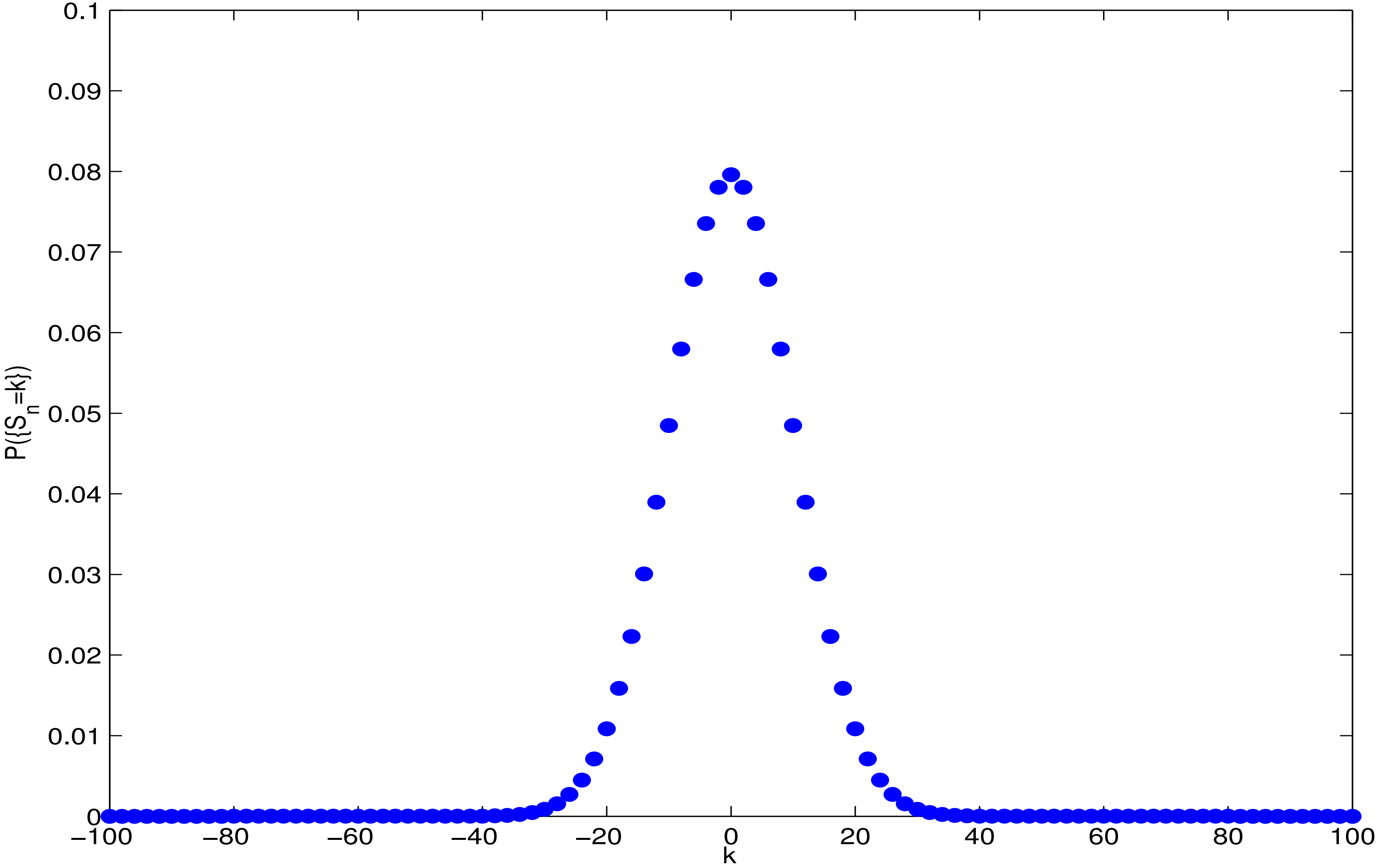
49. Beispiel Dichten von standardisierten Summen n unabhängiger $\mathbf{Exp}(1)$-verteilter ZVen



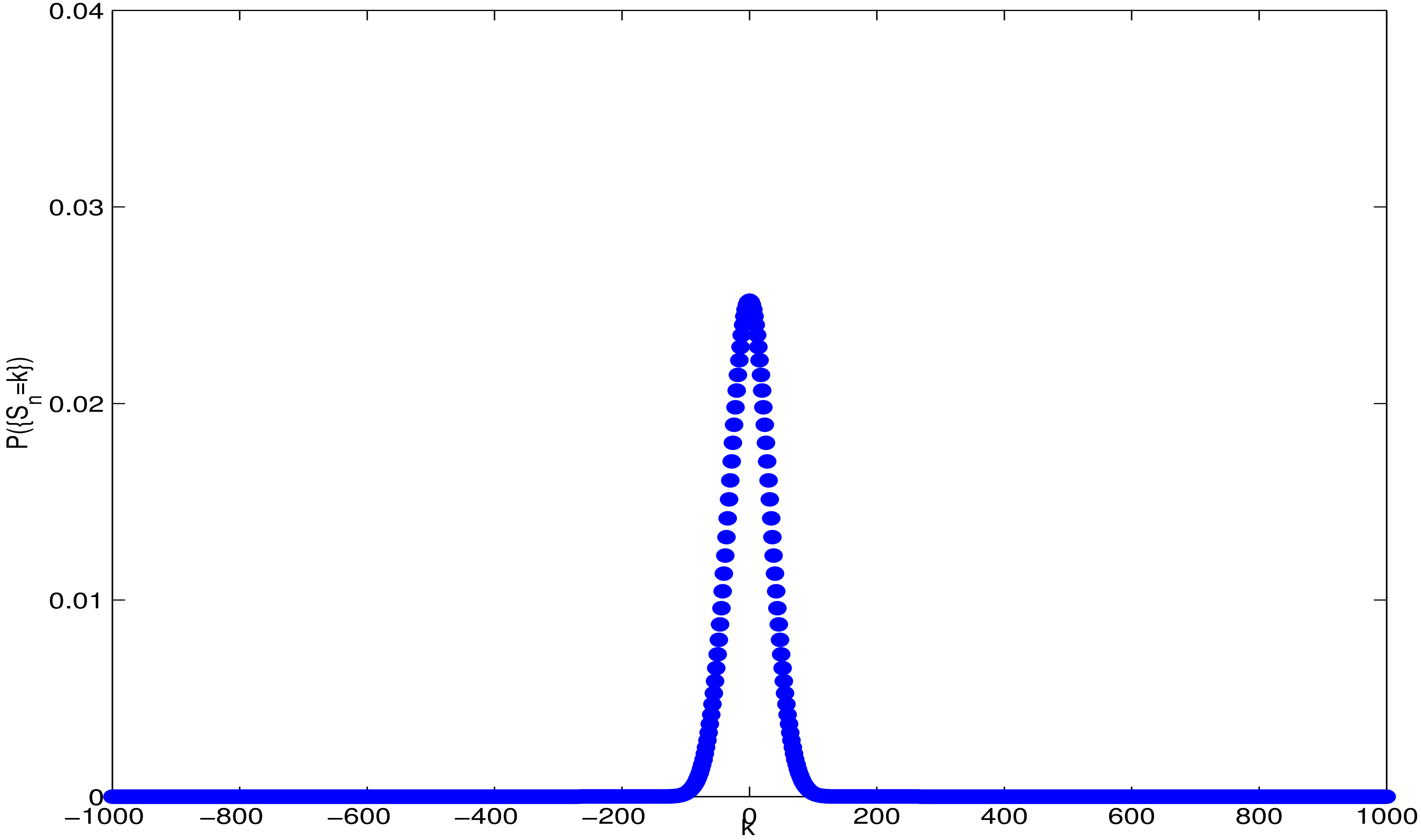
50. Beispiel Sei $\alpha > 0$. Betrachte symmetrische Bernoulli-Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gesucht: Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]0, \infty[$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n| \leq c_n\}) = \alpha.$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 100$



Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 1000$



Standardisieren mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$:

$$\{|S_n| \leq c_n\} = \{-c_n \leq S_n \leq c_n\} = \{-c_n/\sqrt{n} \leq S_n^* \leq c_n/\sqrt{n}\}.$$

Also für $c_n := c \cdot \sqrt{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n| \leq c_n\}) &= \lim_{n\to\infty} P(\{-c \leq S_n^* \leq c\}) \\ &= \Phi(c) - \Phi(-c) = 2\Phi(c) - 1.\end{aligned}$$

Somit leistet das $(1+\alpha)/2$-Quantil

$$c := \Phi^{-1}((1+\alpha)/2)$$

der Standard-Normalverteilung das Verlangte.

51. Beispiel Überbuchung von Flugverbindungen:

- Kapazität $K \in \mathbb{N}$
- Buchungsanzahl $n \in \mathbb{N}$, wobei die Passagiere unabhängig jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in \,]0, 1[$ erscheinen

Gegeben $\alpha \in \,]0, 1[$. Bestimme $n \in \mathbb{N}$, so daß Überbuchung ungefähr mit Wahrscheinlichkeit α.

Modell: $X_1, \ldots, X_n$ iid, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$.

Es gilt $\left\{\sum_{i=1}^n X_i > K\right\} = \{S_n^* > c_n\}$ mit

$$S_n^* := \sum_{i=1}^n (X_i - p)/\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)},$$

$$c_n := (K - n \cdot p)/\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Somit ist c_n näherungsweise durch $c_n = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ gegeben.
Für $K := 1000$, $p := 0,9$ und $\alpha := 0,01$ ergibt sich näherungsweise
$c_n = 2,33$ und

$$n = 1086.$$

Hiermit gilt für die erwartete Anzahl nicht beförderter Passagiere bei hinreichend großem n

$$\mathrm{E}\Big(\max\big(\sum_{i=1}^n X_i - K, 0\big)\Big) \leq 86 \cdot P\Big(\Big\{\sum_{i=1}^n X_i > K\Big\}\Big) < 1.$$

52. Satz Für $a, b, \mu, \mu_i \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\sigma, \sigma_i \in]0, \infty[$ gilt:

(i) Falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, dann
$a \cdot X + b \sim \mathbf{N}(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$.

(ii) Falls $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i$ und $\sigma^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Beweis. <u>ÜBUNG</u> □

53. Bemerkung Satz 52 zeigt, daß $S_n^* \sim \mathbf{N}(0, 1)$, falls $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.