2 Gesetze der großen Zahlen

In diesem und dem folgenden Abschnitt

- $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von identisch verteilten ZVen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_1 \in \mathfrak{L}_1$,
- $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ für $n \in \mathbb{N}$.

Untersucht wird die Konvergenz geeignet normierter Partialsummen S_n.

Hier zunächst Konvergenz des arithmetischen Mittels S_n/n gegen $\mathrm{E}(X_1)$.

31. Beispiel Gelte

$$P(\{X_1 = 1\}) = p, \qquad\qquad P(\{X_1 = -1\}) = 1 - p$$

für $p \in \,]0,1[$. Dann

$$\mathrm{E}(X_1) = 2p - 1$$

und

$$1/2 \cdot (S_n + n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i + 1)/2 \sim \mathbf{B}(n, p).$$

Speziell:

- $p = 1/2$: symmetrische Bernoulli-Irrfahrt mit unendlichem Zeithorizont
- $p = 19/37 = 0,5135\ldots$: einfaches Spiel beim Roulette aus Sicht des Kasinos

Somit gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\} &= \{|S_n - n \cdot (2p-1)| \geq n \cdot \varepsilon\} \\
&= \{|(S_n + n)/2 - n \cdot p| \geq n/2 \cdot \varepsilon\},
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) = \sum_{k \in K} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}
$$

mit $K := \{k \in \{0, \ldots, n\} : |k - n \cdot p| \geq n/2 \cdot \varepsilon\}$.

Frage: Wie verhalten sich diese Wahrscheinlichkeiten für große Werte n?

Antwort unter sehr allgemeinen Voraussetzungen im folgenden Satz.

32. Satz Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Falls $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise unkorreliert, so folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. Es gilt $X_i \in \mathfrak{L}_2$ sowie $\mathrm{E}(S_n/n) = \mathrm{E}(X_1)$ und gem. Satz 26

$$\mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1).$$

Also sichert Satz 29

$$P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{Var}(S_n/n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}.$$

$\square$

Jakob Bernoulli (1713), Khintchine (1928)

33. Bemerkung Was besagt Satz 32 für die Folge der Verteilungen P_{S_n}? Es gilt

$$\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| < \varepsilon\})$$
$$= \{(\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}.$$

Also

$$\lim_{n \to \infty} P(\{(\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}) = 1.$$

Beachte: Satz 32 macht keine Aussage über einzelne Realisierungen $S_1(\omega), S_2(\omega), \ldots$ der Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

34. Beispiel Sei $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Der Beweis von Satz 32 zeigt

$$P(\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n}.$$

Es gilt jedoch auch die für großes n wesentlich bessere

Hoeffdingsche Ungleichung

$$P(\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon\}) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n),$$

siehe <u>Übung</u>. Beispielsweise gilt für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^4$

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0,25 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 0,270\ldots$$

und für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^5$

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0,025 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 4,12 \cdots \cdot 10^{-9}.$$

Nun zur Konvergenz der Realisierungen $S_1(\omega)/1, S_2(\omega)/2, \ldots$.

35. Satz Starkes Gesetz der großen Zahlen

Falls $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig, so folgt für fast alle $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(\omega)/n = \mathrm{E}(X_1)$$

Beweis. Siehe Irle (2001, Kap. 11) und Vorlesung „Probability Theory“.
Spezialfall in Kapitel IV.2 behandelt. □

Borel (1909), Kolmogorov (1930), Etemadi (1981)

Stochastische Simulation zur Berechnung von $\mathrm{E}(X')$:

- Konstruiere iid-ZVen $X_1, \ldots, X_n$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei X' und X_1 identisch verteilt

- Erzeuge eine Realisierung $x_1, \ldots, x_n$ der ZVen $X_1, \ldots, X_n$, d.h. für ein $\omega \in \Omega$

$$x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega)$$

- Approximiere $\mathrm{E}(X') = \mathrm{E}(X_1)$ durch die entsprechende Realisierung von S_n/n (Mittelwert)

$$1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

36. Beispiel Betrachte die ZV

$$X' := \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{n} Y_i' \leq 1\}, & \text{falls } \{\dots\} \text{ beschränkt} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $(Y_i')_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $Y_1' \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ für $\lambda := 5$.

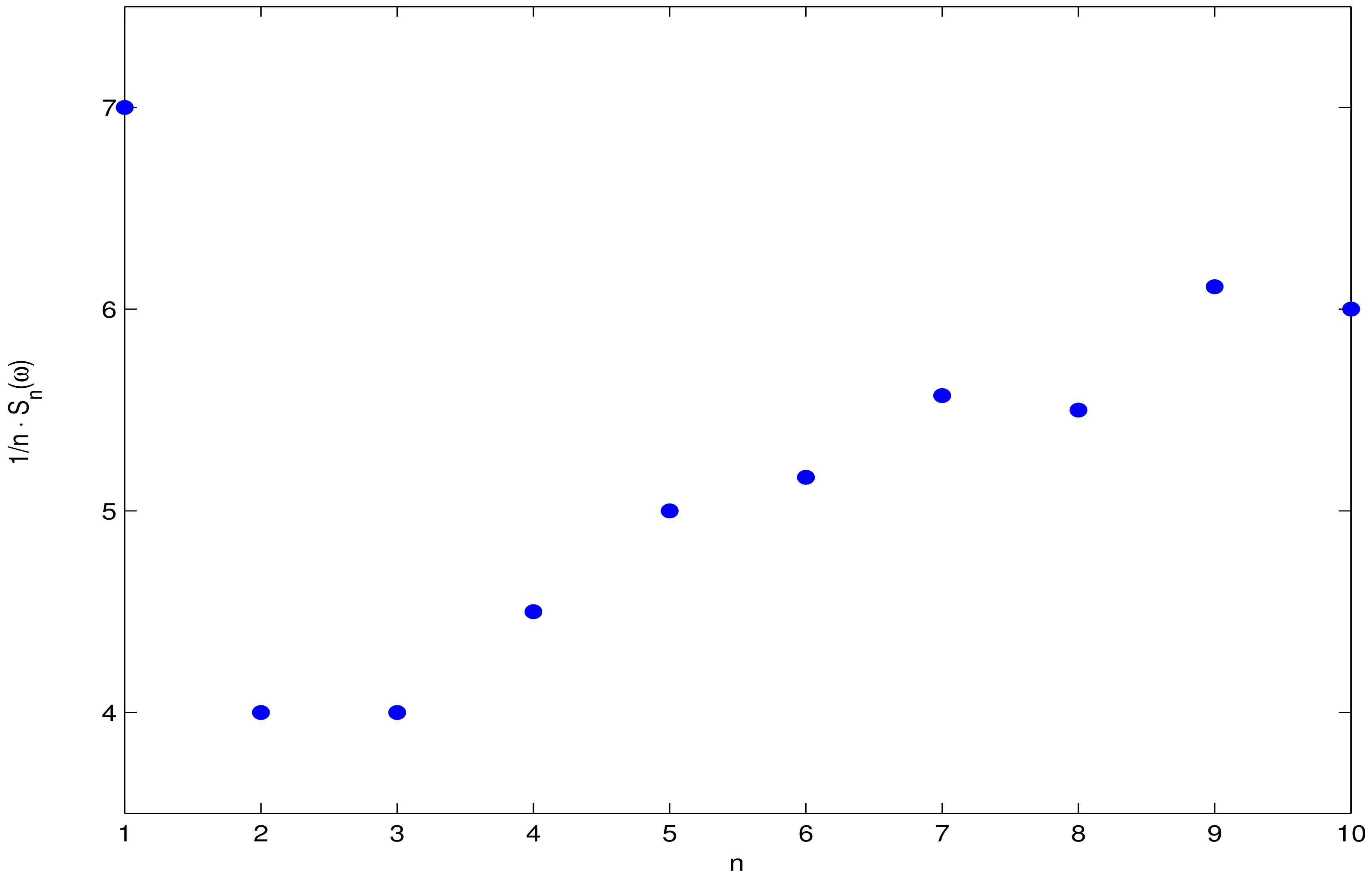
Anwendung: Warteschlangentheorie, Stichwort Poisson-Prozeß.

Berechne $\mathrm{E}(X')$. Vgl. Übung.

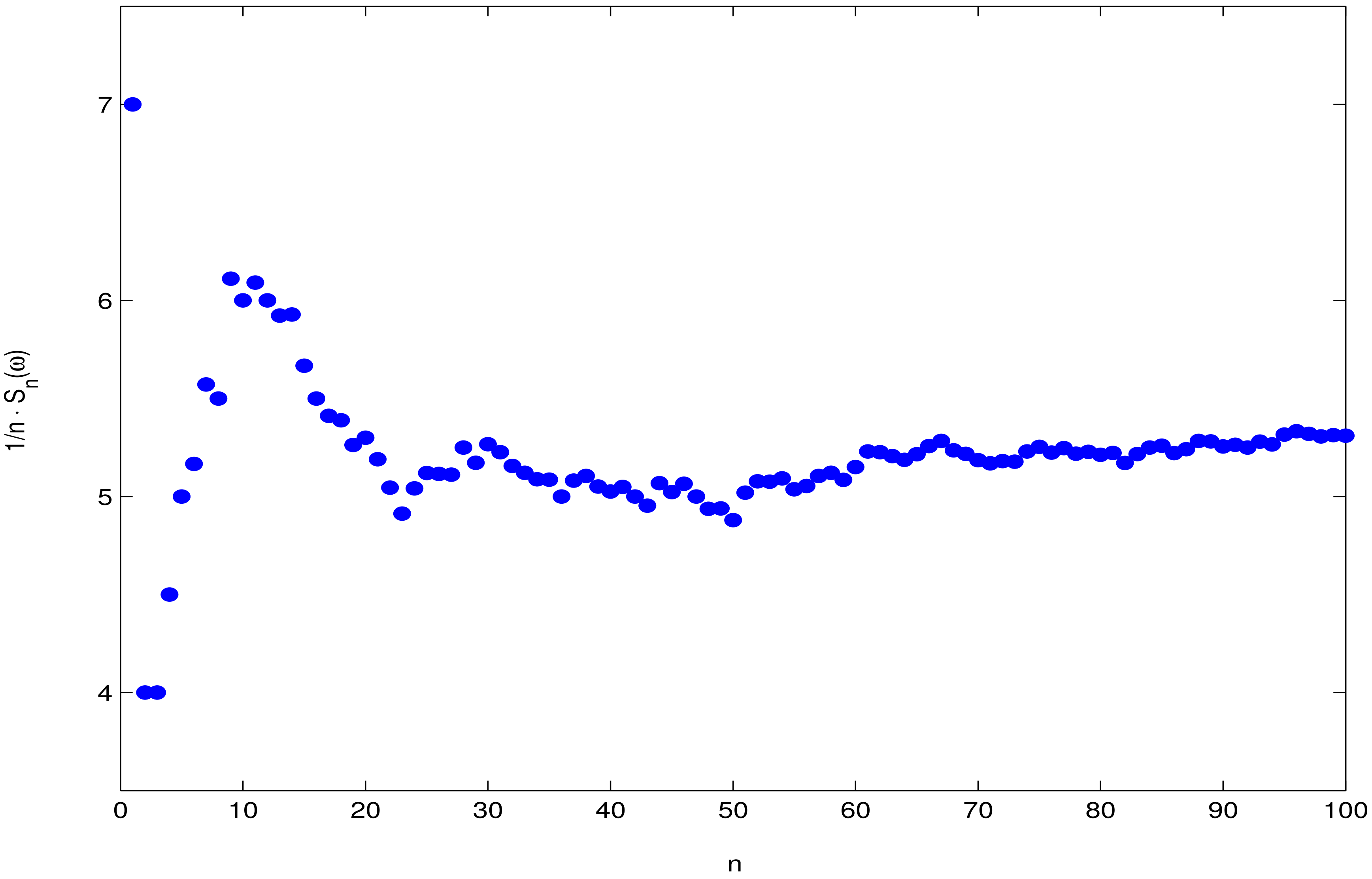
Die ersten 10 Simulationen lieferten die Werte

$$7,\ 1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 6,\ 8,\ 5,\ 11,\ 5.$$

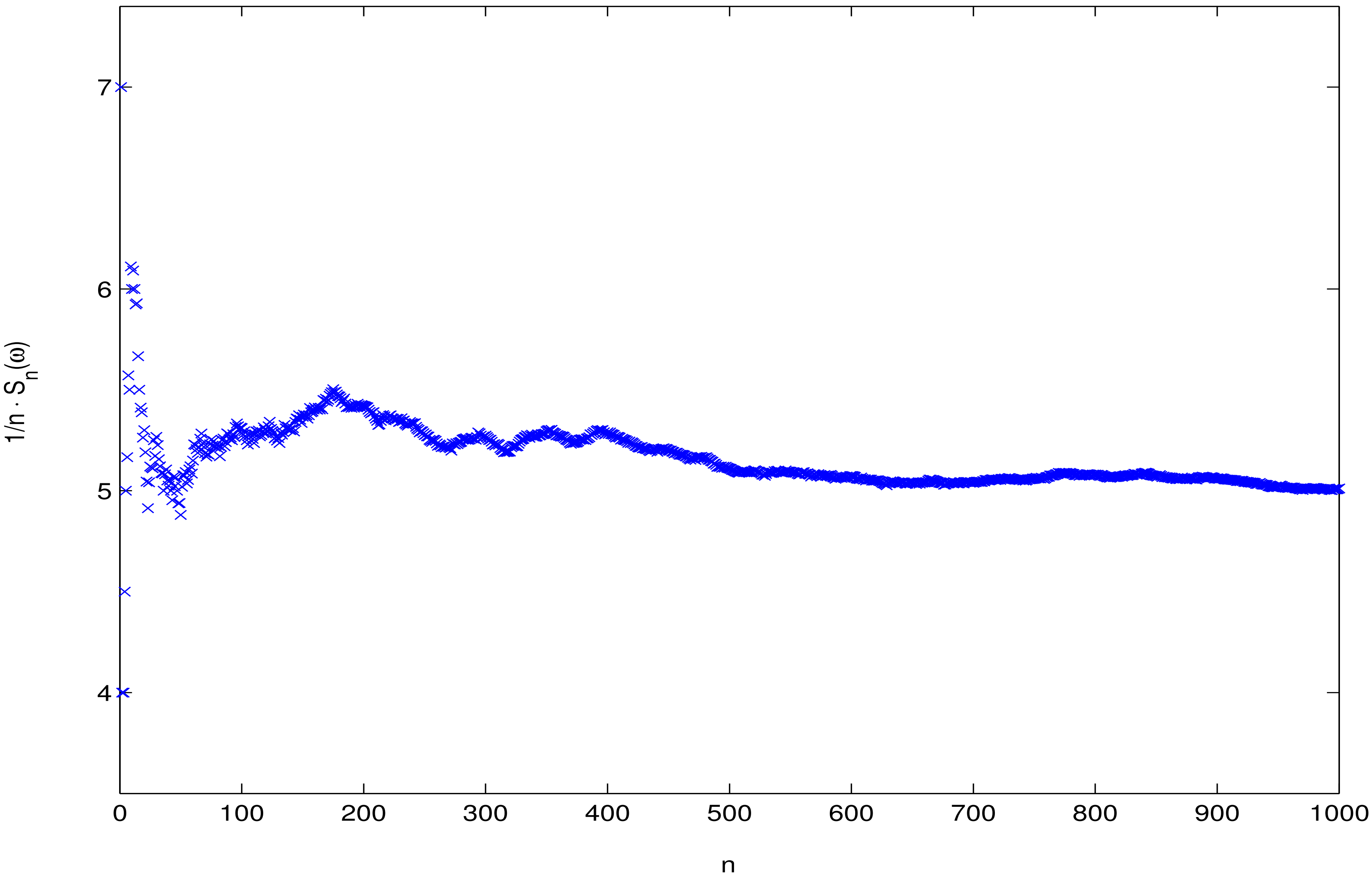
Realisierung von S_n/n für $n = 1, \ldots, 10$



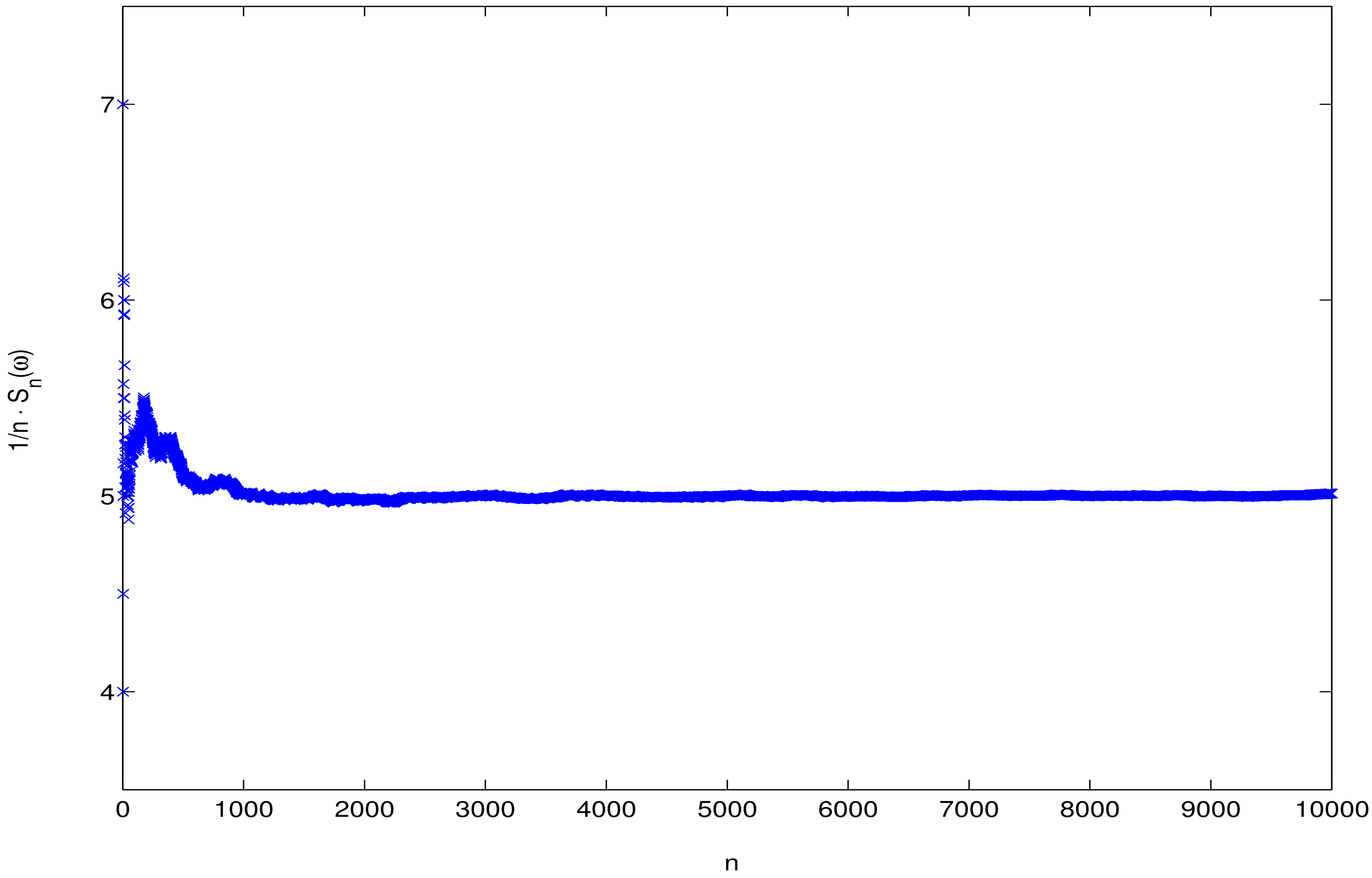
Realisierung von S_n/n für $n = 1, \ldots, 100$



Realisierung von S_n/n für $n = 1, \ldots, 1000$



Realisierung von S_n/n für $n = 1, \ldots, 10000$



37. Bemerkung Was besagt Satz 35 für Folgen von Realisierungen der ZVen S_n?

Für alle $\varepsilon > 0$ und fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\exists n_0(\varepsilon, \omega)\, \forall n \geq n_0(\varepsilon, \omega) :$$
$$(\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n(\omega) \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n.$$

Vergleich der Konvergenzbegriffe im Starken und Schwachen Gesetz der großen Zahlen.

38. Satz Gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$$

für eine Folge von ZVen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|Y_n| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. <u>ÜBUNG</u> $\square$

Anwendung mit $Y_n := S_n/n - \mathrm{E}(X_1)$.