# Kap. VI Grenzwertsätze der Stochastik

1. Erwartungswert und Varianz
2. Gesetze der großen Zahlen
3. Zentraler Grenzwertsatz

# 1 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert: „mittlerer Wert“ einer Zufallsvariablen, „Schwerpunkt“ ihrer Verteilung. Allgemeine Defi nition basiert auf abstraktem Lebesgue-Integral.

**1. Bemerkung** Die Menge der ZVen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bildet einen Vektorraum. Auf dem Untervektorraum $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der integrierbaren ZVen erklärt man das Integral

$$\mathrm{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega),$$

genannt Erwartungswert von $X$.

Die Abbildung $\mathrm{E} : \mathfrak{L}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist linear und monoton, d.h. für $X, Y \in \mathfrak{L}_1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\, \mathrm{E}(X) + \beta\, \mathrm{E}(Y)$
- $X \leq Y \Rightarrow \mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y)$

Ferner gilt für ZVen $X$ und $Y$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$:

- $|X| \leq Y \wedge Y \in \mathfrak{L}_1 \Rightarrow X \in \mathfrak{L}_1$
- Falls $X \geq 0$:
  $X \in \mathfrak{L}_1 \wedge \mathrm{E}(X) = 0 \Leftrightarrow P(\{X > 0\}) = 0$

Wir betrachten die Spezialfälle:

(i) $X$ diskret, also $P(\{X \in D\}) = 1$ für abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$

(ii) $X$ absolutstetig mit Dichte $f_X$

Die folgenden Sätze dienen uns als Definitionen, siehe Irle (2001, Kap. 8).

**2. Satz** Im Fall (i) gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\sum_{x \in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in D} x \cdot P(\{X = x\}).$$

**3. Satz** Im Fall (ii) gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

**4. Bemerkung** Integrierbarkeit von $X$ und gegebenenfalls $\mathrm{E}(X)$ hängt nur von der Verteilung $P_X$ ab.

**5. Bemerkung** Für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $1_A \in \mathfrak{L}_1$ und $\mathrm{E}(1_A) = P(A)$.

**6. Beispiel**

$$X \sim \mathbf{B}(n,p) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = n \cdot p$$

$$X \sim \mathbf{G}(p) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = 1/p$$

$$X \sim \mathbf{P}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = \lambda$$

$$X \sim \mathbf{U}([a,b]) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = (a+b)/2$$

$$X \sim \mathbf{Exp}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = 1/\lambda$$

$$X \sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \mathrm{E}(X) = \mu$$

*Beweis.* Für $X \sim \mathbf{B}(1, p)$

$$\mathrm{E}(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Für $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ wegen Bem. 4 und Satz III.26 oBdA

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ iid und $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Also

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = n \cdot \mathrm{E}(X_1) = n \cdot p.$$

Beachte: Unabhängigkeit nicht verwendet.

Sei $f_X$ die Dichte von $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\ dx = \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\ dx$$

$$= -x \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{\lambda} \exp(-\lambda x)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für die restlichen Verteilungen: <u>ÜBUNG</u>. □

**7. Beispiel** Sei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $Y_1 \sim \mathbf{SB}$. Betrachte die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt $S_t := \sum_{j=1}^{t} Y_j$ für $t \in \mathbb{N}_0$ (unendlicher Zeithorizont). Definiere

$$X = \begin{cases} \min\{t \in \mathbb{N} : S_t = 1\}, & \text{falls } \{\dots\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } \forall t \in \mathbb{N} : \; S_t \leq 0. \end{cases}$$

Es gilt $P(\{X > 0\}) = 1$ und für $t \in \mathbb{N}$

$$P(\{X = 2t - 1\}) = \frac{(2t-2)!}{t! \cdot (t-1)!} \cdot \frac{1}{2^{2t-1}}.$$

Da $\sum_{t=1}^{\infty} (2t-1) \cdot P(\{X = 2t-1\}) = \infty$, folgt $X \notin \mathfrak{L}_1$.

Siehe Shreve (2004, Chap. 5.2), Stochastic Calculus for Finance I.

Nun: Hilfsmittel zur Berechnung von Erwartungswerten.

**Bezeichnung** $(\Omega_j)_{j \in J}$ abzählbare Partition von $\Omega$, falls:

(i) $J$ abzählbar

(ii) $\Omega_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j \in J$

(iii) $\Omega_j \cap \Omega_\ell = \emptyset$ für $j \neq \ell$

(iv) $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$

**8. Lemma** Sei $X$ ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und sei $(\Omega_j)_{j \in J}$ abzählbare Partition von $\Omega$. Gelte

$$\forall j \in J \, \exists c_j \in \mathbb{R} \, \forall \omega \in \Omega_j : \; X(\omega) = c_j.$$

Dann gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\sum_{j \in J} |c_j| \cdot P(\Omega_j) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j \in J} c_j \cdot P(\Omega_j).$$

**9. Bemerkung** Satz 2 beruht auf der abzählbaren Partition $(\{X = x\})_{x \in D}$.

*Beweis von Lemma 8.* Für

$$D := \{c_j : j \in J\}$$

gilt

$$P(\{X \in D\}) = 1.$$

Setze $J_x = \{j \in J : c_j = x\}$ für $x \in D$. Dann

$$\begin{aligned}\sum_{x\in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) &= \sum_{x\in D} |x| \cdot \sum_{j\in J_x} P(\Omega_j) \\ &= \sum_{x\in D} \sum_{j\in J_x} |c_j| \cdot P(\Omega_j) \\ &= \sum_{j\in J} |c_j| \cdot P(\Omega_j).\end{aligned}$$

Berechnung des Erwartungswertes analog ohne Beträge. $\square$

**10. Korollar** Falls $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ diskret, gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot P(\{\omega\}) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}).$$

*Beweis.* Wähle $J := \Omega$, $\Omega_j := \{j\}$ und $c_j := X(j)$ in Lemma 8. $\square$

**11. Definition** $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel-meßbar, falls

$$\forall A \in \mathfrak{B}_1 : \ g^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_d.$$

Vgl. Lemma V.13.

**12. Bemerkung**

(i) Menge der Borel-meßbaren Funktionen $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet Vektorraum.

(ii) Jede stetige Funktion $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-meßbar.

(iii) $g = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{B}_d$ ist Borel-meßbar.

Siehe Irle (2001, Kap. 7).

## 13. Lemma Transformationssatz

Sei $X$ ein $d$-dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte $f_X$ und $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar. Genau dann gilt $h(X) \in \mathfrak{L}_1$, wenn $\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)| \cdot f_X(x)\, dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(h(X)) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \cdot f_X(x)\, dx < \infty.$$

*Beweis.* Siehe Irle (2001, Satz 8.21). □

Lemma 13 gilt ohne die Annahme, daß $h(X)$ absolutstetig verteilt ist.

**14. Satz** Sind $X, Y \in \mathfrak{L}_1$ unabhängig, so folgt $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1$ und

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y).$$

*Beweis.* Hier Beweis unter der zusätzlichen Annahme, daß $X, Y$ diskret.

Wähle $D \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $P(\{X \in D\}) = P(\{Y \in D\}) = 1$, setze

$$\Omega_{(x,y)} = \{(X,Y) = (x,y)\}, \qquad (x,y) \in D^2,$$
$$\Omega_* = \{X \notin D\} \cup \{Y \notin D\},$$
$$X' = 1_D \cdot X \quad \text{und} \quad Y' = 1_D \cdot Y.$$

Dann

$$P(\{X \cdot Y \neq X' \cdot Y'\}) \leq P(\{X \notin D\} \cup \{Y \notin D\}) = 0.$$

Also $P_{X \cdot Y} = P_{X' \cdot Y'}$ und somit $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1 \Leftrightarrow X' \cdot Y' \in \mathfrak{L}_1$.

Ferner

$$\sum_{(x,y)\in D^2} |x \cdot y| \cdot P(\Omega_{(x,y)}) + 0 \cdot P(\Omega_*)$$

$$= \sum_{x \in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) \cdot \sum_{y \in D} |y| \cdot P(\{X = y\}) < \infty,$$

und Lemma 8 zeigt $X' \cdot Y' \in \mathfrak{L}_1$.

Berechnung des Erwartungswertes analog ohne Beträge.

Im Spezialfall absolutstetiger ZVen $X, Y$ verwendet man den Satz von Fubini und Satz V.49.(i). $\square$

Nun: „Streuungsmaß“ für Zufallsvariablen.

**15. Definition** ZV $X$ quadratisch integrierbar, falls $X^2 \in \mathfrak{L}_1$.

Bez.: $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Menge der quadr. int'baren ZVen.

**16. Satz** $\mathfrak{L}_2$ ist Untervektorraum von $\mathfrak{L}_1$.

*Beweis.* Verwende $|X| \leq 1 + X^2$ und $(X+Y)^2 \leq 2\,X^2 + 2\,Y^2$. $\square$

**17. Bemerkung** Quadratische Integrierbarkeit von $X$ und gegebenenfalls $\mathrm{E}(X^2)$ hängt nur von der Verteilung $P_X$ ab.

**18. Satz** Im Fall (i) gilt $X \in \mathfrak{L}_2$ genau dann, wenn $\sum_{x \in D} x^2 \cdot P(\{X = x\}) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{x \in D} x^2 \cdot P(\{X = x\}).$$

*Beweis.* Wende Lemma 8 mit $J := D$, $\Omega_j := \{X = j\}$ und $c_j := j^2$ an. □

**19. Satz** Im Fall (ii) gilt $X \in \mathfrak{L}_2$ genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx.$$

*Beweis.* Wende Lemma 13 mit $h(x) := x^2$ an. □

**20. Definition** Für $X \in \mathfrak{L}_2$ heißt

$$\mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2$$

die Varianz und $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ die Standardabweichung von $X$.

**21. Bemerkung** Für $X \in \mathfrak{L}_2$ gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ fast sicher konstant}$$

**22. Satz** Für $X \in \mathfrak{L}_2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

(ii) $\mathrm{Var}(\alpha \cdot X + \beta) = \alpha^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$

*Beweis.* Ad (i): Es gilt

$$(X - \mathrm{E}(X))^2 = X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathrm{E}(X) + (\mathrm{E}(X))^2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2 &= \mathrm{E}(X^2) - 2 \cdot (\mathrm{E}(X))^2 + (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2.\end{aligned}$$

Ad (ii): Es gilt

$$\alpha \cdot X + \beta - \mathrm{E}(\alpha \cdot X + \beta) = \alpha \cdot (X - \mathrm{E}(X)).$$

Es folgt

$$\mathrm{Var}(\alpha \cdot X + \beta) = \mathrm{E}(\alpha^2 \cdot (X - \mathrm{E}(X))^2) = \alpha^2 \cdot \mathrm{Var}(X).$$

$\square$

**23. Bemerkung** Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ gilt $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1$.

Verwende $|X \cdot Y| \leq X^2 + Y^2$.

**24. Definition** $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ unkorreliert, falls

$$\mathrm{E}(X \cdot Y) = \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y).$$

**25. Bemerkung**

(i) $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ unabhängig $\Rightarrow X, Y$ unkorreliert,

siehe Satz 14. Umkehrung falsch, siehe <u>ÜBUNG</u>.

(ii) $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ genau dann unkorreliert, wenn

$$\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X)) \cdot (Y - \mathrm{E}(Y))) = 0.$$

**26. Satz** Formel von Bienaymé

Falls $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{L}_2$ paarweise unkorreliert:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).$$

**27. Beispiel** Für $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 1/2)$ und $X_2 = -X_1$ gilt $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = 1/4$.

*Beweis von Satz 26.* Setze $Y_i := X_i - \mathrm{E}(X_i)$ („zentrieren“).

Für $i \neq j$ gilt $\mathrm{E}(Y_i \cdot Y_j) = 0$. Also

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i \cdot Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i).
\end{aligned}
$$

$\square$

## 28. Beispiel

$$X \sim \mathbf{B}(n,p) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$X \sim \mathbf{G}(p) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$$

$$X \sim \mathbf{P}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

$$X \sim \mathbf{U}([a,b]) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$$

$$X \sim \mathbf{Exp}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$$

$$X \sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

*Beweis.* Für $X \sim \mathbf{B}(1, p)$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p).$$

Für $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ wegen Bem. 4, 17 und Satz III.26 oBdA

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mit $X_1, \ldots, X_n$ iid und $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Mit Satz 26 folgt

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\,dx \\
&\quad = -x^2 \cdot \exp(-\lambda x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot \exp(-\lambda x)\,dx \\
&\quad = \frac{2}{\lambda} \cdot \mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Demnach gilt $\mathrm{E}(X^2) = \dfrac{2}{\lambda^2}$ und

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Für die restlichen Verteilungen: <u>ÜBUNG</u>. $\square$

Nun Abschätzung für die Konzentration einer ZV um ihren Erwartungswert.

**29. Satz** Tschebyschev-Ungleichung

Für $X \in \mathfrak{L}_2$ und $\varepsilon > 0$

$$P(\{|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{Var}(X)$$

*Beweis.* Für $A := \{|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon\} \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\varepsilon^2 \cdot 1_A \leq (X - \mathrm{E}(X))^2 \cdot 1_A \leq (X - \mathrm{E}(X))^2.$$

Es folgt

$$\varepsilon^2 \cdot P(A) = \varepsilon^2 \cdot \mathrm{E}(1_A) \leq \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2.$$

□

**30. Satz** Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$

$$|\,\mathrm{E}(X \cdot Y)| \leq \sqrt{\mathrm{E}(X^2) \cdot \mathrm{E}(Y^2)}.$$

*Beweis.* <u>ÜBUNG</u> □