4 Absolutstetige Verteilungen und Zufallsvariablen

23. Bemerkung Integralbegriffe für Funktionen $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) Lebesgue-Integral (Vorlesung Analysis IV). Spezialfall:

(ii) Uneigentliches Riemann-Integral (Walther, Analysis II, Springer, 1990, §7.20). Spezialfall: Für abgeschlossene Intervalle $B_i \subseteq \mathbb{R}$ und $B := B_1 \times \cdots \times B_d \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f|_B$ stetig. Setze $B^{(K)} := B \cap [-K, K]^d$. Falls $\sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{B^{(K)}} |f(x)|\, dx < \infty$, so gilt

$$\int_B f(x)\, dx = \lim_{K \to \infty} \underbrace{\int_{B^{(K)}} f(x)\, dx.}_{\text{Berechnung als iteriertes Integral}}$$

24. Definition $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ Wahrscheinlichkeitsdichte, kurz Dichte, falls f (Lebesgue)-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 1.$$

25. Satz Jede Dichte f definiert durch

$$P(A) := \int_A f(x)\, dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$.

Vgl. Satz III.3 über Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Ausblick: singuläre Verteilungen, Übung.

Beweis von Satz 25. Klar: $P \geq 0$ und $P(\mathbb{R}^d) = 1$.

Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}_d$ p.d. und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x) \cdot f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz. $\square$

Zur Eindeutigkeit von Dichten:

26. Lemma Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall A \in \mathfrak{B}_d : \displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx$

(ii) $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}) = 0$

Beweis. Folgt aus Meintrup, Schäffler (2005, Satz 2.15). $\square$

Im folgenden: $X = (X_1, \ldots, X_d)$ d-dimensionaler Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

27. Definition X absolutstetig verteilt, falls P_X eine Dichte besitzt. Diese wird ggf. mit f_X bezeichnet.

Nun: Modellierung von Verteilungen durch Vorgabe ihrer Dichten.

28. Definition Sei $B \in \mathfrak{B}_d$ mit Lebesgue-Maß (Länge, Flächeninhalt, Volumen) $\lambda_d(B) \in \,]0, \infty[$. Zufallsvektor (bzw. -variable) X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot 1_B(x)$$

heißt gleichverteilt auf B.

Bez.: $X \sim \mathbf{U}(B)$.

29. Bemerkung Für $X \sim \mathbf{U}(B)$ und $A \in \mathfrak{B}_d$:

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot \int_A 1_B(x)\, dx = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}$$

30. Beispiel Dichte und Verteilungsfunktion von $X \sim \mathbf{U}([a,b])$ mit $a < b$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } x \in [a,b] \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Vgl. Definition IV.25.

31. Beispiel $X \sim \mathbf{U}(B)$ zur Modellierung von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, Glücksrad.

Anwendung: Zufallszahlen und stochastische Simulation, siehe Kapitel IV.

32. Definition Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ heißt exponentialverteilt mit Parameter λ.

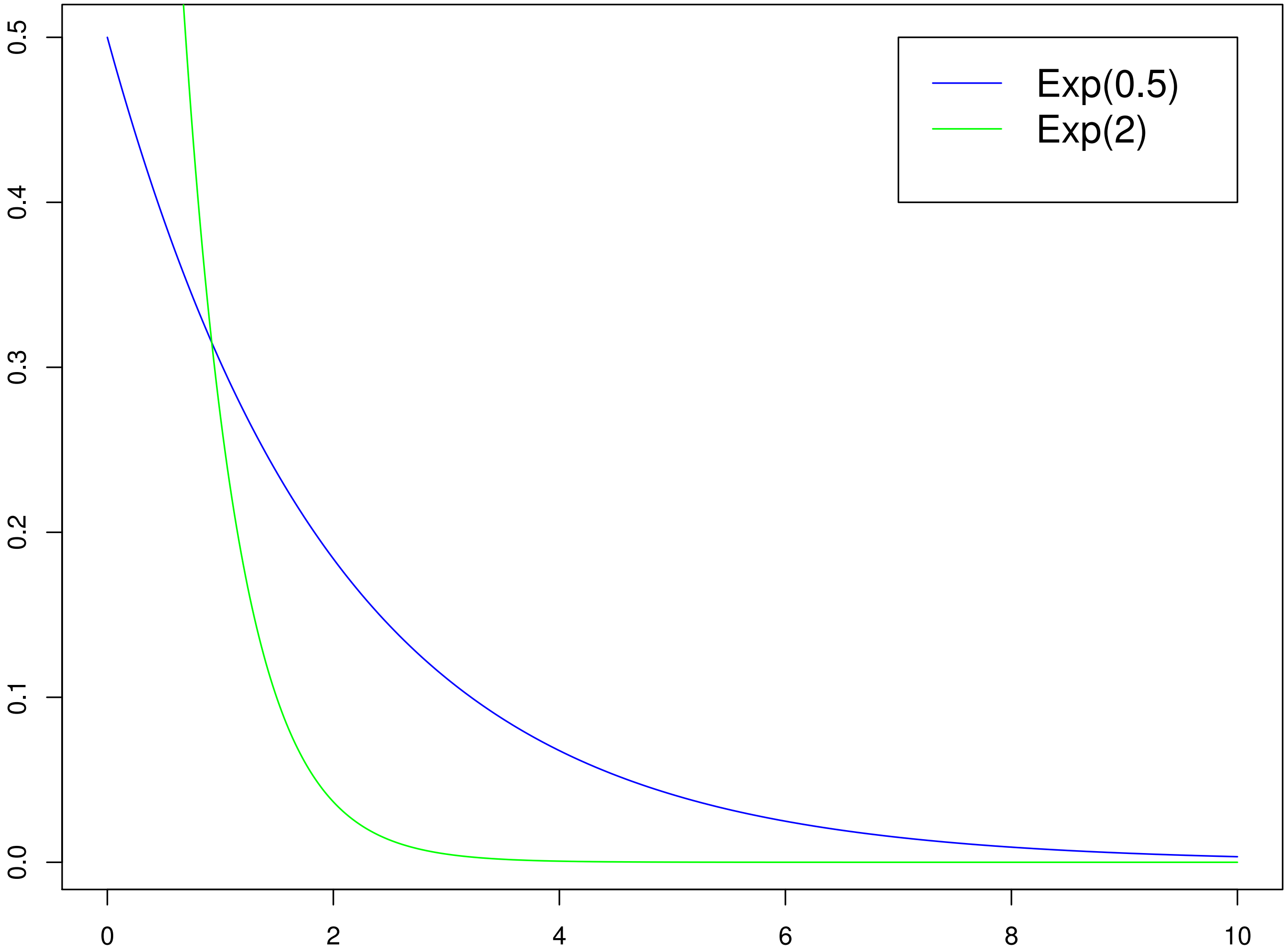
Bez.: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$

33. Bemerkung Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ und $x > 0$:

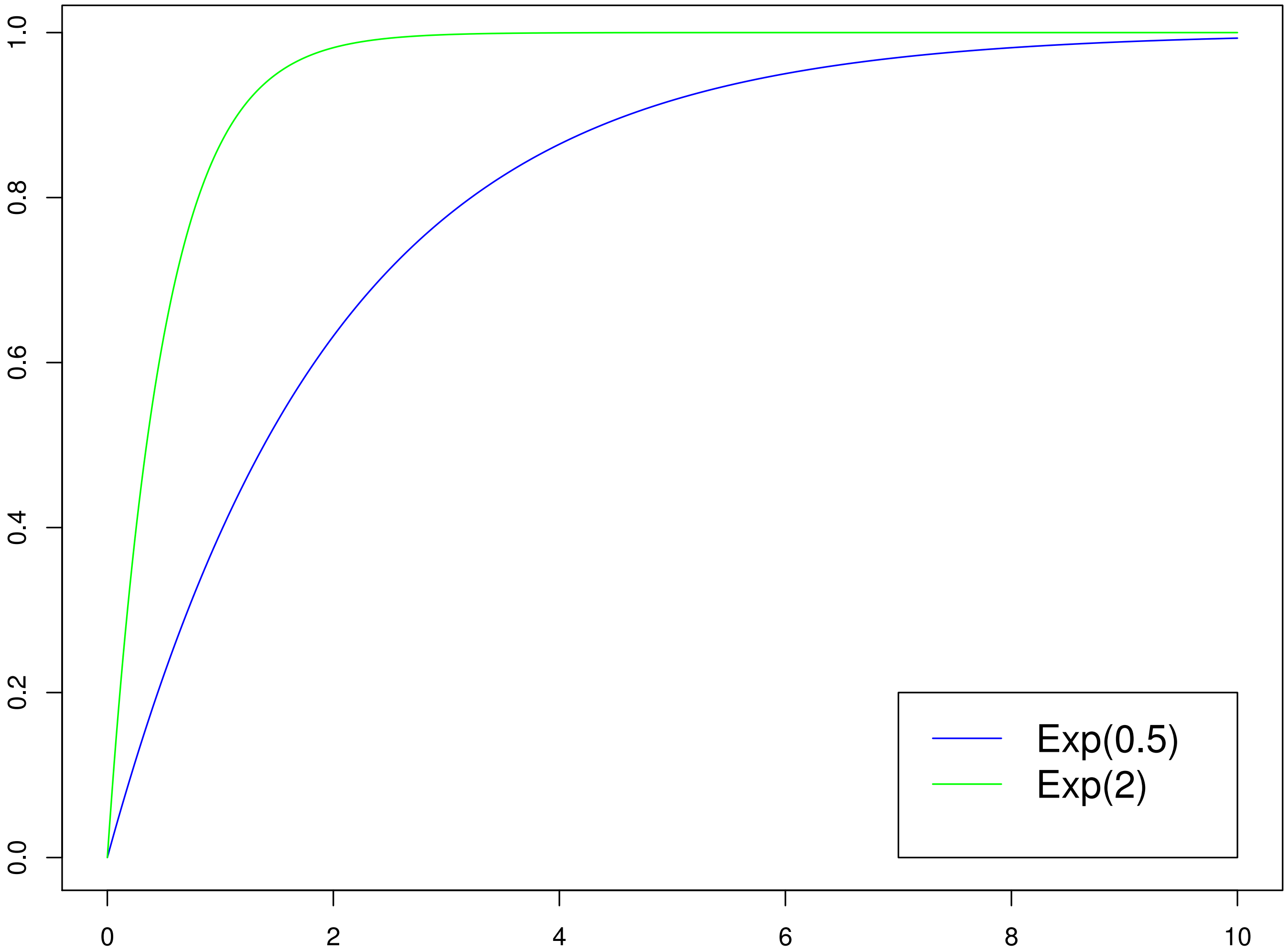
$$F_X(x) = \lambda \cdot \int_0^x \exp(-\lambda y)\, dy = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Klar: $F_X(x) = 0$, falls $x \leq 0$.

34. Beispiel Dichten exponentialverteilter ZVen



35. Beispiel Verteilungsfunktionen exponentialverteilter ZVen



36. Satz Charakterisierung der Exp'verteilung durch Gedächtnislosigkeit

Für ZV X mit

- $P(\{X > 0\}) = 1$ und
- $\forall t > 0 : P(\{X > t\}) > 0$

sind äquivalent:

(i) $\exists \lambda > 0 : \; X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$

(ii) $\forall s, t > 0 :$

$$P(\{X > t + s\} \,|\, \{X > t\}) = P(\{X > s\})$$

Beweis. Übung $\square$

Vgl. Übung M:H13 und WInf:H12.

37. Beispiel $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ zur Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten.

Hier: radioaktiver Zerfall, X Zerfallszeitpunkt. Halbwertszeit $h > 0$ definiert als Median,

$$P(\{X \leq h\}) = \frac{1}{2}.$$

Man erhält

$$h = \ln(2)/\lambda.$$

38. Beispiel $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid, $X_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ mit unbekanntem $\lambda > 0$. Problem: Schätze λ bzw. $h = \ln(2)/\lambda$.

Gem. Kap. IV.9 gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,h]}(X_i) = \frac{1}{2}.$$

Auf Basis von Realisierungen $x_i = X_i(\omega)$ schätzt man h durch den Median der empirischen Verteilungsfunktion (empirischer Median). Siehe Beispiel IV.24.

Warnung.

39. Lemma Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

Beweis. OBdA $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (Substitutionsregel). Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\, dx\right)^2 \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\, d(x,y) \\
&\quad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\cdot r\, dr\, d\varphi \\
&\quad = 2\pi \cdot \left(-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi
\end{aligned}
$$

$\square$

40. Definition Zufallsvariable X mit Dichte

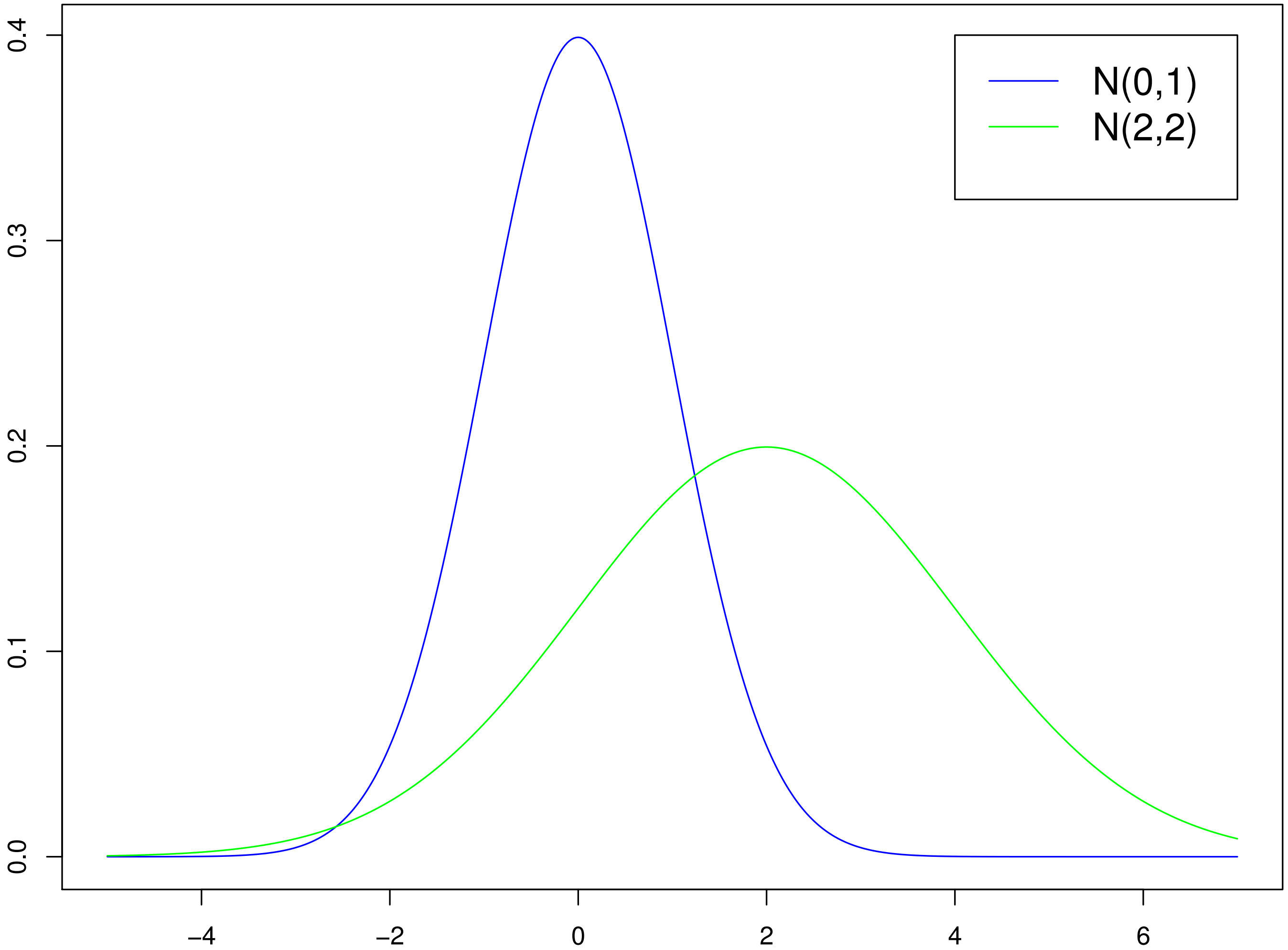
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt mit Parametern μ und σ^2.

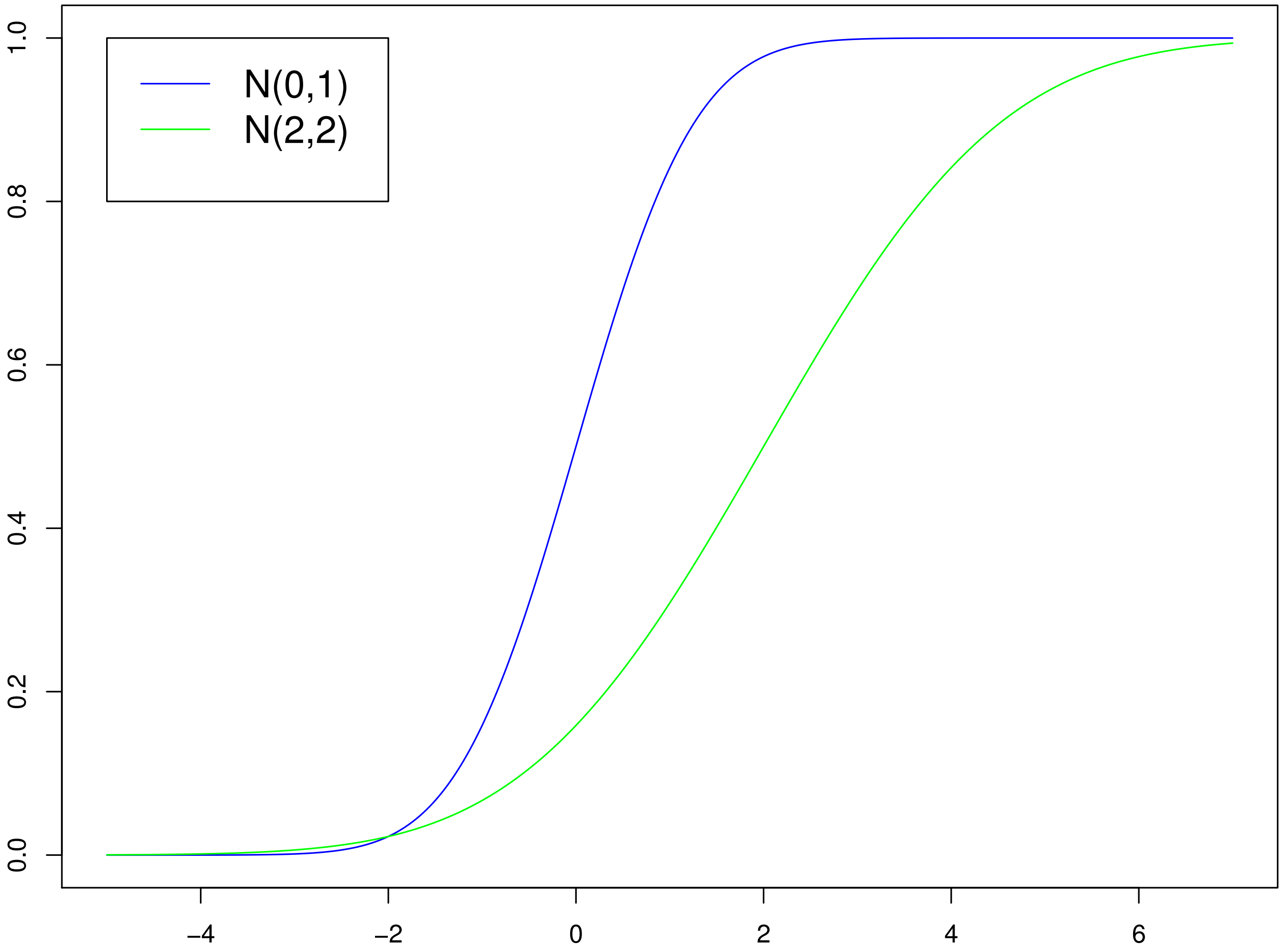
Bez.: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$

Standard-Normalverteilung als Spezialfall: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

41. Beispiel Dichten normalverteilter ZVen



42. Beispiel Verteilungsfunktionen normalverteilter ZVen



43. Beispiel $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ zur Modellierung (Meß)Fehlern.

Siehe auch Kap. VI.3.

44. Bemerkung Keine explizite Formel für Verteilungsfunktion F_X, falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$.

Bez.: $\Phi = F_X$, falls $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$, also

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, dy.$$

Zur Berechnung von Φ und entsprechender Quantile:

Numerik, Tabellen, Plots.

Nun speziell: mehrdimensionale Dichten.

Analytisches Hilfsmittel: Satz von Fubini.

45. Lemma Falls f_X Dichte von P_X, so besitzt P_{X_i} die Dichte

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\, d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

mit

$$\overline{x}_1 = (x_1, \ldots, x_{i-1}), \qquad \overline{x}_2 = (x_{i+1}, \ldots, x_d).$$

Beweis. Für $A_i \in \mathfrak{B}_1$ sei $A := \mathbb{R}^{i-1} \times A_i \times \mathbb{R}^{d-i}$. Dann

$$P(\{X_i \in A_i\}) = P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{A_i} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, \dots, x_d)\,dx_d \dots dx_1$$

$$= \int_{A_i} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\,d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}_{=:g(x_i)}\,dx_i,$$

und g ist eine Dichte. $\square$

46. Beispiel Pfeiltreffer auf Dartscheibe. Hier

$$f_X(x_1, x_2) := \frac{1}{\pi r^2} \cdot 1_K(x_1, x_2)$$

mit

$$K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$$

Also für $x_1 \in [-r, r]$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} 1\, dx_2$$
$$= \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x_1^2}$$

sowie $f_{X_1}(x_1) = 0$, falls $|x_1| > r$. Klar:

$$f_{X_1} = f_{X_2}$$

47. Definition Tensorprodukt $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ von Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_d(x) := f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_d(x_d).$$

Vgl. Abschnitt III.3.

48. Lemma Falls $f_1, \ldots, f_d$ Dichten auf $\mathbb{R}$, so ist $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$ Dichte auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Klar. Vgl. Lemma III.14. $\square$

49. Satz

(i) Falls $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig mit Dichten f_{X_i}, so besitzt X die Dichte

$$f_X = f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}.$$

(ii) Falls X die Dichte

$$f_X = f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$$

mit eindimensionalen Dichten f_i besitzt, so sind $X_1, \ldots, X_d$ unabhängig mit Dichten $f_{X_i} = f_i$.

Beweis. Ad (i): Gemäß Satz 25 und Lemma 48 definiert

$$Q(A) := \int_A f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}(x)\,dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein W'maß auf $\mathfrak{B}_d$. Speziell für $A := A_1 \times \cdots \times A_d$ mit $A_i := \left]-\infty, b_i\right]$

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\}) &= \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{d} \int_{A_i} f_{X_i}(x_i)\,dx_i \\ &= \int_{A_1} \ldots \int_{A_d} \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i)\,dx_d \ldots dx_1 = Q(A). \end{aligned}$$

Satz 9 zeigt $P_X = Q$.

Ad (ii): Für $A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1$ und $A := A_1 \times \cdots \times A_d$

$$P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\, dx = \int_{A_1} f_1(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{A_d} f_d(x_d)\, dx_d.$$

Insbesondere

$$P(\{X_i \in A_i\}) = \int_{A_i} f_i(x_i)\, dx_i,$$

d.h. f_i ist Dichte von X_i, und weiter

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i \in A_i\}).$$

$\square$

50. Bemerkung Mit Satz 49: Modellierung der „unabhängigen Hintereinanderausführung" von Einzelexperimenten, deren Verteilungen Dichten besitzen.

51. Beispiel Pfeiltreffer auf Dartscheibe, siehe Bsp. 46.

Satz 49 zeigt: X_1, X_2 nicht unabhängig.

52. Definition d-dimensionaler Zufallsvektor X mit Dichte

$$f_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)$$

heißt standard-normalverteilt (in $\mathbb{R}^d$).

53. Beispiel Dichte einer 2-dim. normalverteilten ZV