3 Verteilungen

Im folgenden $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ W'raum und $X_1, \ldots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$.

Setze $X := (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$.

13. Lemma Äquivalent sind:

(i) $X_1, \ldots, X_d$ Zufallsvariablen

(ii) $\forall A \in \mathfrak{B}_d : \{X \in A\} \in \mathfrak{A}$

Vgl. mit Lemma II.39 im Fall $d = 1$.

Vgl. Begriff der Meßbarkeit von Abbildungen.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“

$$\{X_i \leq c_i\} = \{X_i \leq c_i\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{X_j \in \mathbb{R}\} = \{X \in A\}$$

für $A = \mathbb{R}^{i-1} \times \left]-\infty, c_i\right] \times \mathbb{R}^{d-i}$. Da A abgeschlossen, folgt $A \in \mathfrak{B}_d$ und wg. (ii) auch $\{X_i \leq c_i\} \in \mathfrak{A}$.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Siehe Irle (2001, p. 151). Stichwort: Produkt-Meßbarkeit. $\square$

Fortan $X_1, \dots, X_d$ Zufallsvariablen; X heißt dann auch Zufallsvektor.

Zufallsvektoren dienen zur gemeinsamen Modellierung mehrerer Aspekte eines Zufallsexperimentes; bisher etwa bei Unabhängigkeit von Zufallsvariablen und in Bem IV.33.

14. Satz

$$P_X(A) := P(\{X \in A\}), \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

definiert Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$.

Beweis. Klar: $P_X \geq 0$ und $P_X(\mathbb{R}^d) = P(\{X \in \mathbb{R}^d\}) = P(\Omega) = 1$.
Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}_d$ p.d. und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$P_X(A) = P\Big(\Big\{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big\}\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\{X \in A_i\}}_{\in \mathfrak{B}_d \text{ p.d.}}\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{X \in A_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i).$$

□

15. Definition P_X heißt Verteilung von X. Im Falle $d > 1$ heißt P_X auch gemeinsame Verteilung von $X_1, \ldots, X_d$ und $P_{X_1}, \ldots, P_{X_d}$ heißen (eindim.) Randverteilungen von X.

Viele Fragestellungen der Stochastik betreffen nicht die konkrete Gestalt des zugrundeliegenden W'raumes und der betrachteten ZVen sondern nur ihre gemeinsame Verteilung. Bsp.: Unabhängigkeit, siehe Satz 21.

16. Beispiel P Gleichverteilung auf $\Omega := \{0,1\}^2$ (zweimaliger Münzwurf) und $X_i(\omega) := \omega_i$.

Gemeinsame Verteilung von X_1 und X_2: für $A \in \mathfrak{B}_2$:

$$
\begin{aligned}
P_X(A) &= P(\{X \in A\}) = |\{\omega \in \Omega : \omega \in A\}|/4 \\
&= |A \cap \Omega|/4
\end{aligned}
$$

Randverteilungen: für $B \in \mathfrak{B}_1$:

$$
\begin{aligned}
P_{X_1}(B) &= P(\{X \in B \times \mathbb{R}\}) = |\{\omega \in \Omega : \omega_1 \in B\}|/4 \\
&= |\{\omega_1 \in \{0,1\} : \omega_1 \in B\}|/2 = |B \cap \{0,1\}|/2
\end{aligned}
$$

Analog $P_{X_2}(B) = |B \cap \{0,1\}|/2$.

Insbesondere: $P_{X_1} = P_{X_2}$, obwohl $X_1 \neq X_2$.

Jetzt $X_1'(\omega) := \omega_1$ und $X_2'(\omega) := \omega_1$. Randverteilungen:

$$P_{X_1'} = P_{X_2'} = P_{X_1} = P_{X_2}.$$

Gemeinsame Verteilung: für $A \in \mathfrak{B}_2$:

$$\begin{aligned} P_{X'}(A) = P(\{X' \in A\}) &= |\{\omega \in \Omega : (\omega_1, \omega_1) \in A\}|/4 \\ &= |\{\omega' \in \{0,1\} : (\omega', \omega') \in A\}|/2 \end{aligned}$$

Also $P_X \neq P_{X'}$. Dies zeigt:

> gemeinsame Verteilung ist durch die eindimensionalen Randverteilungen nicht eindeutig bestimmt

Siehe jedoch Bem. 22.(i).

17. Bemerkung Jedes W'maß P auf $\mathfrak{B}_d$ ist Verteilung eines Zufallsvektors: betrachte $X(\omega) := \omega$ auf dem W'raum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, P)$.

18. Definition X diskreter Zufallsvektor, falls $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}^d$.

Siehe Defi nition III20 im Falle $d = 1$.

19. Bemerkung Berechnung der Verteilung P_X diskreter Zufallsvektoren X prinzipiell durch Summation der Funktion $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto P(\{X = x\})$. Vgl. Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Genauer: für X und D wie oben sowie $A \in \mathfrak{B}_d$ ergibt sich wie auf Seite 190:

$$P_X(A) = P(\{X \in A\}) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}).$$

Betrachte nochmals Bsp. 16.

20. Beispiel P Gleichverteilung auf $\Omega := \{1, \ldots, 6\}^2$ (zweimaliges Würfeln) und

$$X_1(\omega) := \omega_1, \qquad X_2(\omega) := \omega_1 + \omega_2.$$

Für

$$D := \{x \in \{1, \ldots, 6\} \times \{2, \ldots, 12\} \\ : 1 \leq x_2 - x_1 \leq 6\}$$

gilt $P(\{X \in D\}) = 1$ sowie $P(\{X = x\}) = 1/36$ für alle $x \in D$. Also

$$P_X(A) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}) = \frac{1}{36} \cdot |A \cap D|.$$

21. Satz $(X_1, \ldots, X_d)$ genau dann unabhängig, wenn

$$\forall A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1 :$$

$$\underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in A_i\}\right)}_{=P_X(A_1 \times \cdots \times A_d)} = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{P(\{X_i \in A_i\})}_{=P_{X_i}(A_i)},$$

kurz: gemeinsame Verteilung ist Produkt der Randverteilungen.

Beweis. „$\Leftarrow$“ Klar.

„$\Longrightarrow$“ Siehe Irle (2001, p. 169). Teilaussage in Satz II.46.

Hier Beweis unter der zusätzlichen Annahme, daß

$X_1, \ldots, X_d$ diskret.

Wähle abzählbare Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$P(\{X \in D^d\}) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in D\}\Big) = 1.$$

Für $A = A_1 \times \cdots \times A_d$ folgt mit Satz II.46 und Bem. 19:

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in A_i\}\Big) = P(\{X \in A\}) = \sum_{x \in A \cap D^d} P(\{X = x\})$$

$$= \sum_{x_1 \in A_1 \cap D} \cdots \sum_{x_d \in A_d \cap D} \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i = x_i\})$$

$$= \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i \in A_i\})$$

22. Bemerkung

(i) Falls $X_1, \dots, X_d$ unabhängig, so ist die gemeinsame Verteilung P_X eindeutig durch die Randverteilungen $P_{X_1}, \dots, P_{X_d}$ bestimmt. Vgl. Modellierung in Kap. III.

Beweis. Verwende die Sätze 9 und 21. □

(ii) Diskrete ZVen $X_1, \dots, X_d$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \; P(\{X = x\}) = \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i = x_i\}).$$

Beweis. „⇒“ Siehe Satz II.46 bzw. Satz 21. „⇐“ Siehe Seite 212.