2 Das d-dimensionale Lebesgue-Maß

10. Satz Es existiert genau eine σ-additive Abbildung $\lambda_d : \mathfrak{B}_d \to [0, \infty]$ mit

$$\forall a_i \leq b_i : \; \lambda_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Diese erfüllt

$$\lambda_d(a + Q(A)) = \lambda(A)$$

für alle $a \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathfrak{B}_d$ und alle orthogonalen Abbildungen $Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Beweis. Siehe Meintrup, Schäffler (2005, Anhang A.1) $\square$

11. Definition λ_d gem. Satz 10 heißt Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}_d$ oder d-dimensionales Lebesgue-Maß.

12. Bemerkung Definiere

$$\begin{aligned} \Omega &:= [0,1] \text{ bzw. } [0,1[, \\ \mathfrak{A} &:= \{A \cap \Omega : A \in \mathfrak{B}_1\}, \\ P(A) &:= \lambda_1(A), \qquad A \in \mathfrak{A}, \\ U(\omega) &:= \omega, \qquad \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W'raum und es gilt $U \sim \mathbf{U}(\Omega)$. Siehe Definition IV.25.