# Kap. V Verteilungen und absolutstetige Zufallsvariablen

1. Die Borelsche $\sigma$-Algebra in $\mathbb{R}^d$
2. Das $d$-dimensionale Lebesgue-Maß
3. Verteilungen
4. Absolutstetige Zufallsvariablen
5. Verteilungsfunktionen
6. Dichte-Schätzung

Bisher rigoros studiert: diskrete ZVen, also

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$.

Dann gilt für alle $M \in \mathfrak{M}$, siehe Bsp. II.38,

$$
\begin{aligned}
P(\{X \in M\}) &= P(\{X \in M\} \cap \{X \in D\}) \\
&= P\left(\bigcup_{x \in D} \{X \in M\} \cap \{X = x\}\right) \\
&= \sum_{x \in D} P(\{X \in M\} \cap \{X = x\}) \\
&= \sum_{x \in M \cap D} P(\{X = x\}).
\end{aligned}
$$

In diesem Kapitel insbesondere ZVen

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; P(\{X = x\}) = 0.$$

Bsp.: Wartezeit, Koordinaten von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, fehlerhafter Meßwert, ...

Für eine große Klasse solcher ZVen wird die Summation von $x \mapsto P(\{X = x\})$ über $M \cap D$ durch die Integration einer geeigneten Funktion $x \mapsto f_X(x)$ über $M$ ersetzt, also $P(\{X \in M\}) = \int_M f_X(x)\, dx$.

# 1 Die Borelsche $\sigma$-Algebra in $\mathbb{R}^d$

**1. Beispiel** Kontinuierliches „Glücksrad“. Versuch einer stochastischen Modellierung:

(i) $\Omega := [0, 1[$ (Kreislinie der Länge 1)

(ii) $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$

(iii) W'maß $P$ auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $P([a, b]) = b - a$ für $0 \leq a < b < 1$
- $P(A) = P(B)$, falls $B$ aus $A$ durch „Rotation“ hervorgeht

Definiere für $\omega, \omega' \in [0,1[$ und $A \subseteq [0,1[$

$$\omega \oplus \omega' := \omega + \omega' - \lfloor \omega + \omega' \rfloor,$$

$$\omega \oplus A := \{\omega \oplus a : a \in A\}.$$

**Frage**: Existiert ein W'maß $P$ auf $\mathfrak{P}([0,1[)$ mit

$$\forall A \subseteq [0,1[ \ \forall \omega \in [0,1[ : P(\omega \oplus A) = P(A)?$$

**Antwort**: Nein.

Folglich gibt es keine „Gleichverteilung" auf $\mathfrak{P}([0,1[)$.

**Ausweg**: betrachte kleinere $\sigma$-Algebra.

Beweisskizze. Sei $Q := \mathbb{Q} \cap \Omega$. Betrachte Äquivalenzrelation

$$\omega \sim \omega' :\Leftrightarrow \exists\, q \in Q : \omega' = \omega \oplus q$$

auf $\Omega$ und zugehörige Äquivalenzklassen $[r] = \{\omega \in \Omega : \omega \sim r\}$. Wähle Repräsentantensystem $R \subseteq \Omega$ (Auswahlaxiom), d.h.

$$\forall \omega \in \Omega \quad \exists_1\, r \in R : \omega \in [r].$$

Es gilt für $q_1, q_2 \in Q$ mit $q_1 \neq q_2$

$$(q_1 \oplus R) \cap (q_2 \oplus R) = \emptyset.$$

Schließlich erfüllt $P$ mit obigen Eigenschaften

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{q \in Q} q \oplus R) = \sum_{q \in Q} P(q \oplus R) = \sum_{q \in Q} P(R).$$

Widerspruch.

Im folgenden $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie

$$\mathbb{A} := \{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) : \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra},\ \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}\},$$

$$\sigma(\mathfrak{E}) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathbb{A}} \mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega : \forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} :\ A \in \mathfrak{A}\}.$$

Beachte, daß $\mathfrak{P}(\Omega) \in \mathbb{A}$.

**2. Lemma** $\sigma(\mathfrak{E})$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathfrak{E}$ umfaßt, d.h.

(i) $\sigma(\mathfrak{E})$ ist $\sigma$-Algebra,

(ii) $\mathfrak{E} \subseteq \sigma(\mathfrak{E})$,

(iii) $\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} :\ \sigma(\mathfrak{E}) \subseteq \mathfrak{A}$.

*Beweis.* PROJEKTOR. $\square$

**3. Definition** $\sigma(\mathfrak{E})$ die von $\mathfrak{E}$ erzeugte $\sigma$-Algebra (in $\Omega$).

Vgl. erzeugter Untervektorraum.

**4. Beispiel** Für $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathfrak{E} = \{\{1, 2, 3\}, \{2\}\}$

gilt

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathfrak{E}) & \\
&= \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\} \\
&= \{A \subseteq \Omega : \{1, 3\} \subseteq A \text{ oder } \{1, 3\} \cap A = \emptyset\}.
\end{aligned}
$$

**5. Definition** Für $d \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{O}_d := \{O \subseteq \mathbb{R}^d : O \text{ offen}\}$$

heißt $\mathfrak{B}_d := \sigma(\mathfrak{O}_d)$ die Borelsche $\sigma$-Algebra in $\mathbb{R}^d$. Elemente $B \in \mathfrak{B}_d$ heißen Borel-Mengen (in $\mathbb{R}^d$).

**6. Beispiel**

(i) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\Rightarrow A \in \mathfrak{B}_d$, da $A^{\mathsf{c}}$ offen

(ii) $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{B}_1$

**7. Lemma**

$$A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1 \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_d \in \mathfrak{B}_d.$$

*Beweis.* Siehe Irle (2001, p. 151). Stichwort: Produkt-$\sigma$-Algebra. $\square$

**8. Bemerkung** Es gilt $\mathfrak{B}_d \subsetneqq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$. Uns werden in dieser Vorlesung jedoch keine Mengen aus $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{B}_d$ begegnen.

Dazu auch Krengel (2003, p. 127).

**9. Satz** Gilt

$$\forall x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R} : P(]-\infty, x_1] \times \cdots \times ]-\infty, x_n]) \\ = Q(]-\infty, x_1] \times \cdots \times ]-\infty, x_n])$$

für Wahrscheinlichkeitsmaße $P$ und $Q$ auf $\mathfrak{B}_d$, so folgt

$$P = Q.$$

*Beweis.* Siehe Irle (2001, p. 157). □