

# 5 Anwendung: Simulation einer Irrfahrt

Im folgenden  $Y'_1, \dots, Y'_T$  iid mit  $Y'_1 \sim \mathbf{SB}$ , d.h.

$$P'(\{Y'_1 = 1\}) = P'(\{Y'_1 = -1\}) = 1/2.$$

Definiere **symmetrische Bernoulli-Irrfahrt**  $S'_0, \dots, S'_T$  durch

$$S'_t := \sum_{j=1}^t Y'_j = S'_{t-1} + Y'_t.$$

Per def.  $S'_0 = 0$ .

Ausblick: **Irrfahrten auf Gruppen**. **Finanzmathematik**:  $]0, \infty[$  mit Multiplikation, **Kartenspielen**: symmetrische Gruppe mit Komposition.

**31. Beispiel Faires Spiel** zweier Spieler I und II,  $S'_t$  Stand aus Sicht von I nach  $t$  Runden.

**Physik:**  $S'_t$  eindimensionale Position eines Teilchen nach  $t$  Kollisionen.

Problem A: gesucht sind die Vert'funktionen der ZV

- (i) **Spielstand nach letzter Runde**,  $X' := S'_T$
- (ii) **maximaler Spielstand**,  $X' := \max_{t=0, \dots, T} S'_t$
- (iii) **Anzahl der Runden, nach denen Spieler I führt**,

$$X' := |\{t \in \{1, \dots, T\} : S'_t \geq 0 \text{ und } S'_{t-1} \geq 0\}|$$

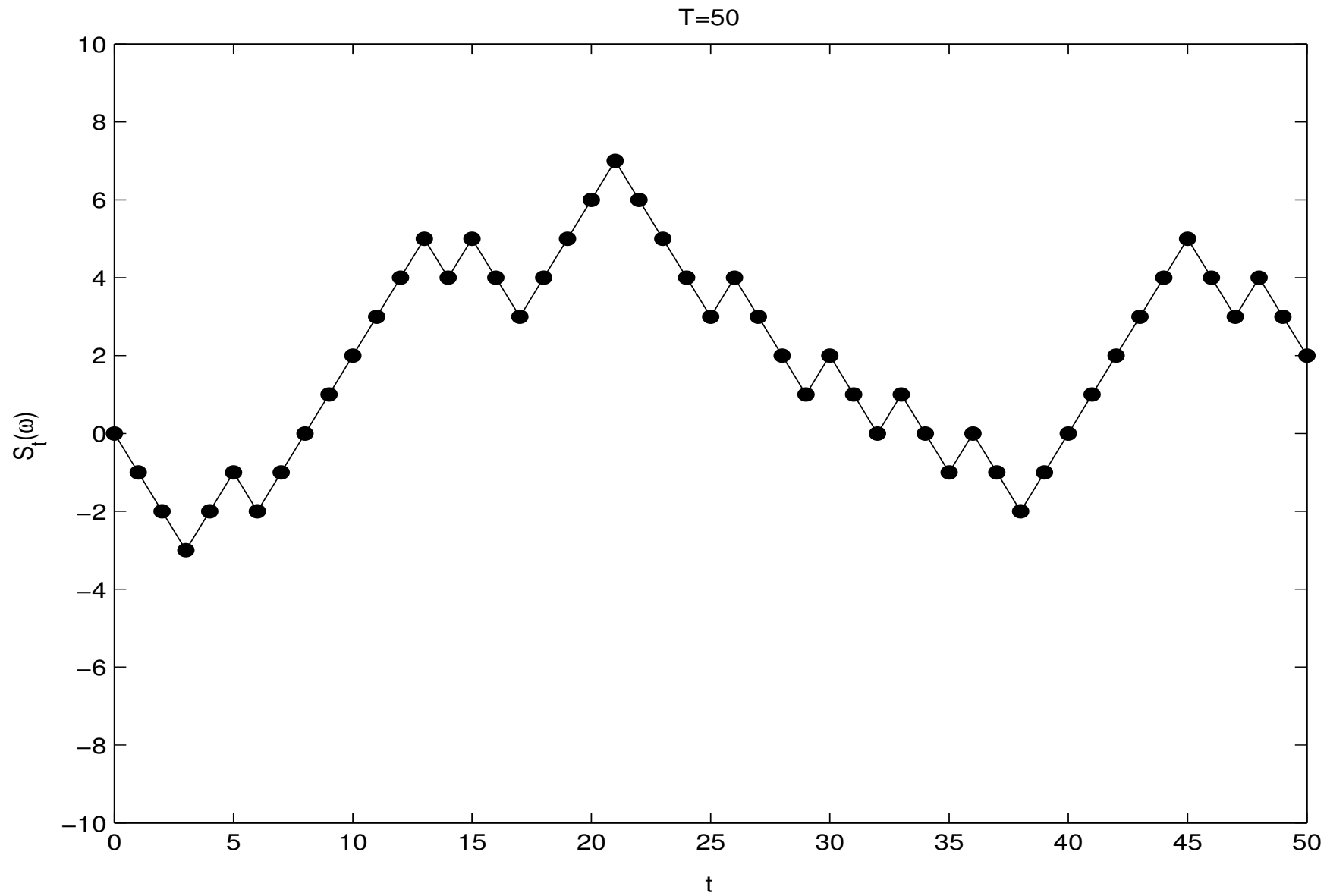
Beachte  $\{S'_t \geq 0\} \cap \{S'_{t-1} \geq 0\}$

$$= \{S'_t > 0\} \cup (\{S'_t = 0\} \cap \{S'_{t-1} > 0\}).$$

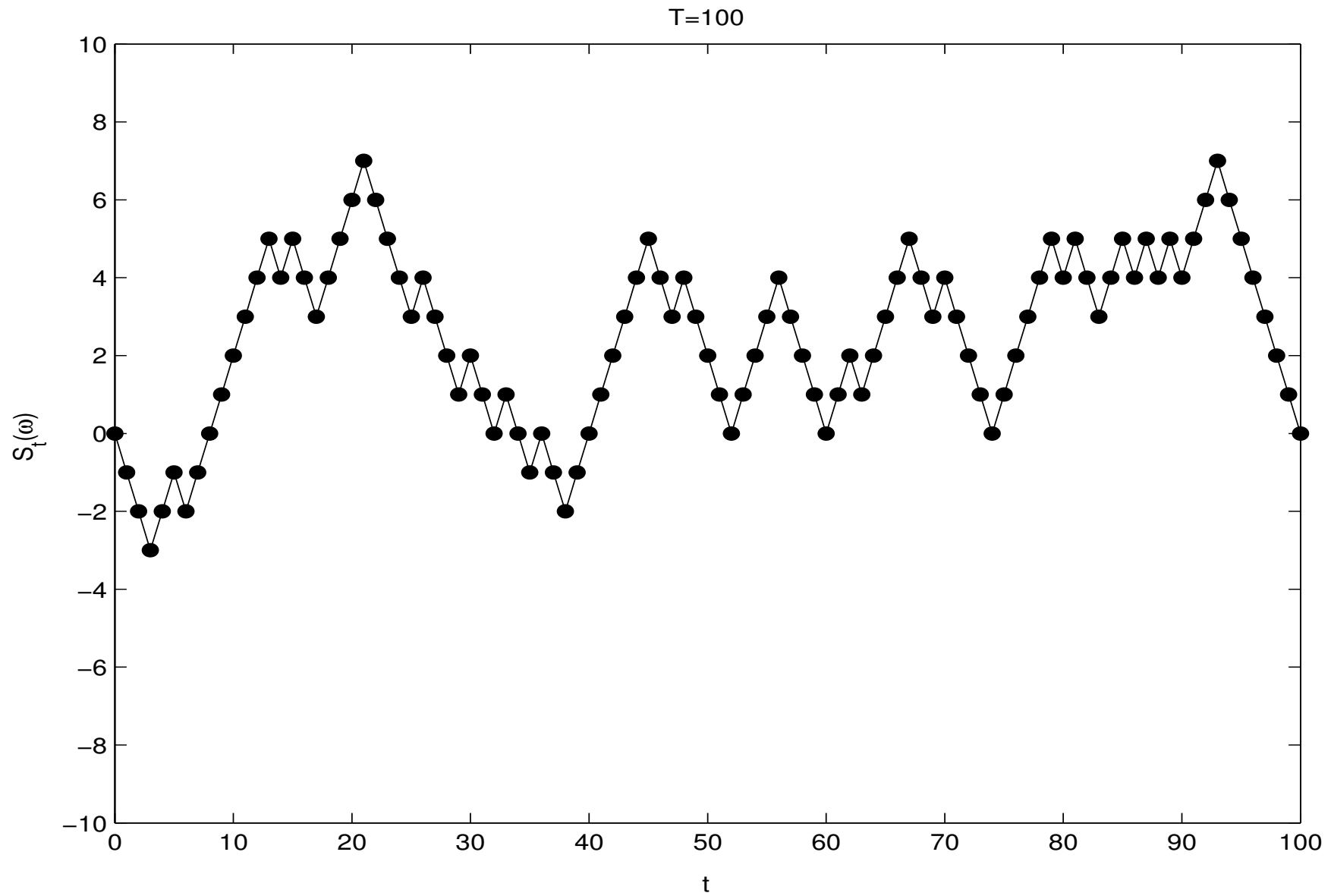
**32. Beispiel** Je eine Simulation der Irrfahrt für

$T = 50, 100, 1000.$

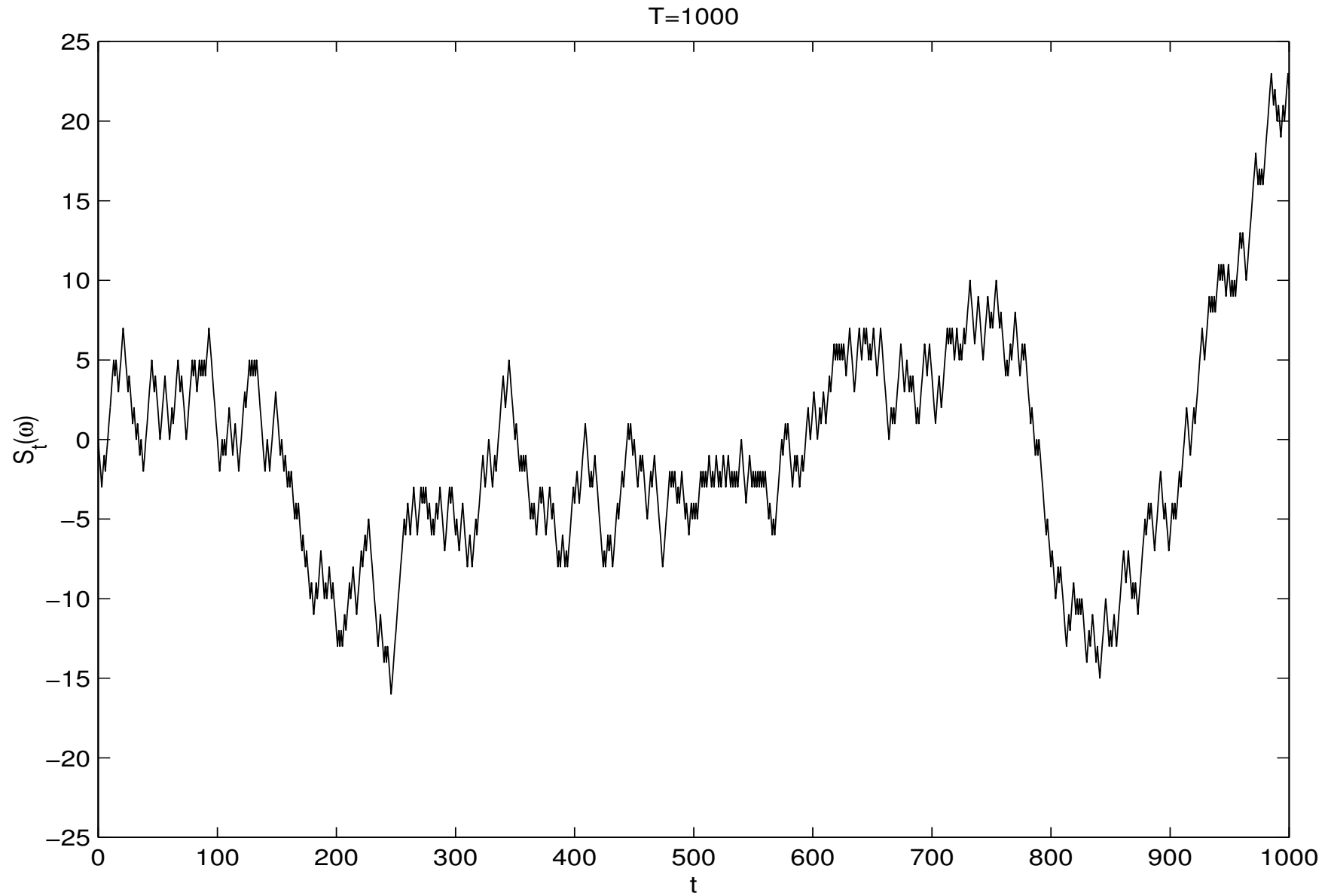
$T = 50$ : end=2, max=7, fueh=36.



$T = 100$ : end=0, max=7, fueh=86.



$T = 1000$ : end=22, max=23, fueh=420.



**33. Bemerkung** Setze  $s_0 := 0$  und

$$D := \{(s_0, \dots, s_T) \in \mathbb{Z}^{T+1} : \forall 1 \leq t \leq T : |s_t - s_{t-1}| = 1\}.$$

Dann gilt:

- $|D| = 2^T$
- $P'(\{(S'_0, \dots, S'_T) = s\}) = 1/|D|$  für alle  $s \in D$

Fazit: Irrfahrt entspricht **Gleichverteilung** auf der Menge  $D$  ihrer **Pfade**.

Irrfahrten als einfaches Beispiel eines **stochastischen Prozesses** zur Modellierung zeitabhängiger zufälliger Phänomene.

Definiere zugehörige Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- bei (i):  $f(s_0, \dots, s_T) = s_T$
- bei (ii):  $f(s_0, \dots, s_T) = \max_{t=0, \dots, T} s_t$
- bei (iii):  $f(s_0, \dots, s_T)$   
 $= |\{t \in \{1, \dots, T\} : s_t \geq 0 \text{ und } s_{t-1} \geq 0\}|$

Somit

$$X' = f \circ (S'_0, \dots, S'_T).$$

Gesucht ist

$$P'(\{X' = x\})$$

für  $x \in \mathbb{Z}$ .



## Simulation von $n$ unabh. Wiederholungen der Irrfahrt:

Betrachte iid-Folge  $Y_1, \dots, Y_{n \cdot T}$  mit  $Y_1 \sim \mathbf{SB}$ .

Definiere für  $t = 0, \dots, T$  und  $i = 1, \dots, n$

$$S_t^i := \sum_{j=1}^t Y_{(i-1) \cdot T + j}.$$

Also

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{Y_1, \dots, Y_T}, \dots, \underbrace{Y_{(n-1) \cdot T + 1}, \dots, Y_{n \cdot T}} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{S_0^1, \dots, S_T^1}, \dots, \underbrace{S_0^n, \dots, S_T^n} & & \\ f \downarrow & & f \downarrow \\ X^1, \dots, X^n & & \end{array}$$

Es gilt bei (i), (ii) und (iii):

$X^1, \dots, X^n$  iid,  $X^1$  und  $X'$  identisch verteilt.

Beweis: Siehe Irle (2001, p. 163, 169) oder Vorlesung „Probability Theory“.

Gem. Kor. 10 existiert  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $P(A) = 1$ , so daß für alle

$\omega \in A$  und alle  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \cdot \sum_{i=1}^n 1_{\{x\}} \underbrace{\left( f(S_0^i(\omega), \dots, S_T^i(\omega)) \right)}_{=X^i(\omega)} \\ & = P'(\{X' = x\}). \end{aligned}$$

**34. Bemerkung** Für  $U \sim \mathbf{U}([0, 1])$  und

$$Y(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } U(\omega) > 1/2 \\ -1, & \text{falls } U(\omega) \leq 1/2 \end{cases}$$

gilt  $Y \sim \mathbf{SB}$ . Vgl. Inversionsmethode.

Zur Simulation von Irrfahrten entsprechende Transformation

$$y_\ell := \begin{cases} 1, & \text{falls } u_\ell > 1/2 \\ -1, & \text{falls } u_\ell \leq 1/2 \end{cases}$$

von in  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallszahlen  $u_1, u_2, \dots$

Setze

$$s_t^i := \sum_{j=1}^t y_{(i-1) \cdot T + j}$$

**Zusammenfassung:** Approximation der gesuchten Wahrscheinlichkeit  $P'(\{X' = x\})$  durch relative Häufigkeit

$$1/n \cdot \sum_{i=1}^n 1_{\{x\}}(f(s_0^i, \dots, s_T^i))$$

der Simulationen, bei denen  $f$  den Wert  $x$  liefert.

Im folgenden: Simulationsergebnisse für  $T = 50$ .

Beachte: Für die Menge  $D$  der Pfade gilt dann

$$|D| = 2^{50} = 1,1 \dots \cdot 10^{15}.$$

Dargestellt wird

$$x \mapsto 1/n \cdot \sum_{i=1}^n 1_{\{x\}}(f(s_0^i, \dots, s_T^i)).$$

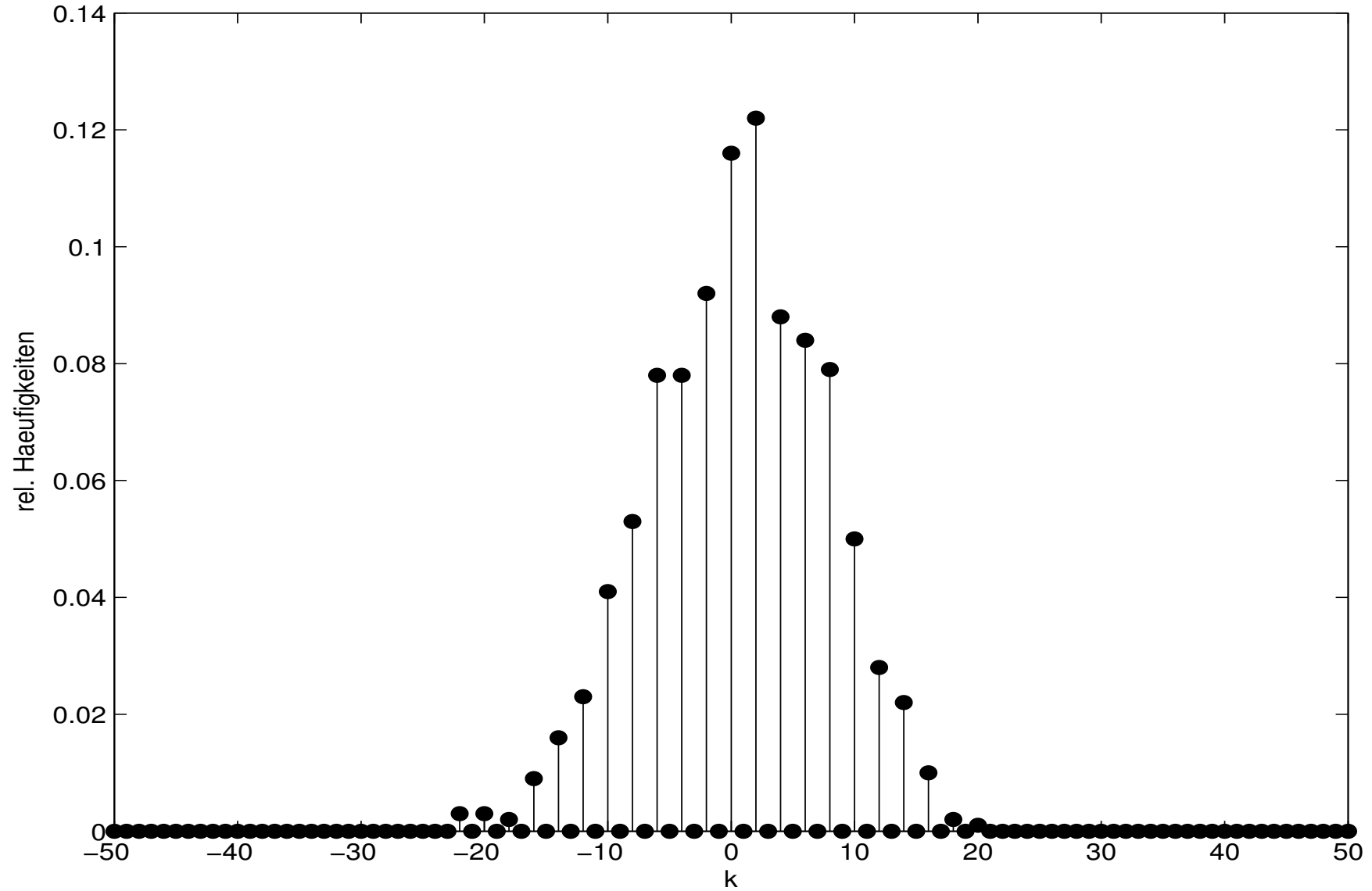
**35. Beispiel** Approximative Berechnung von

$$P'(\{S'_T = x\})$$

für  $x = -T, -T + 2, \dots, T - 2, T$ .

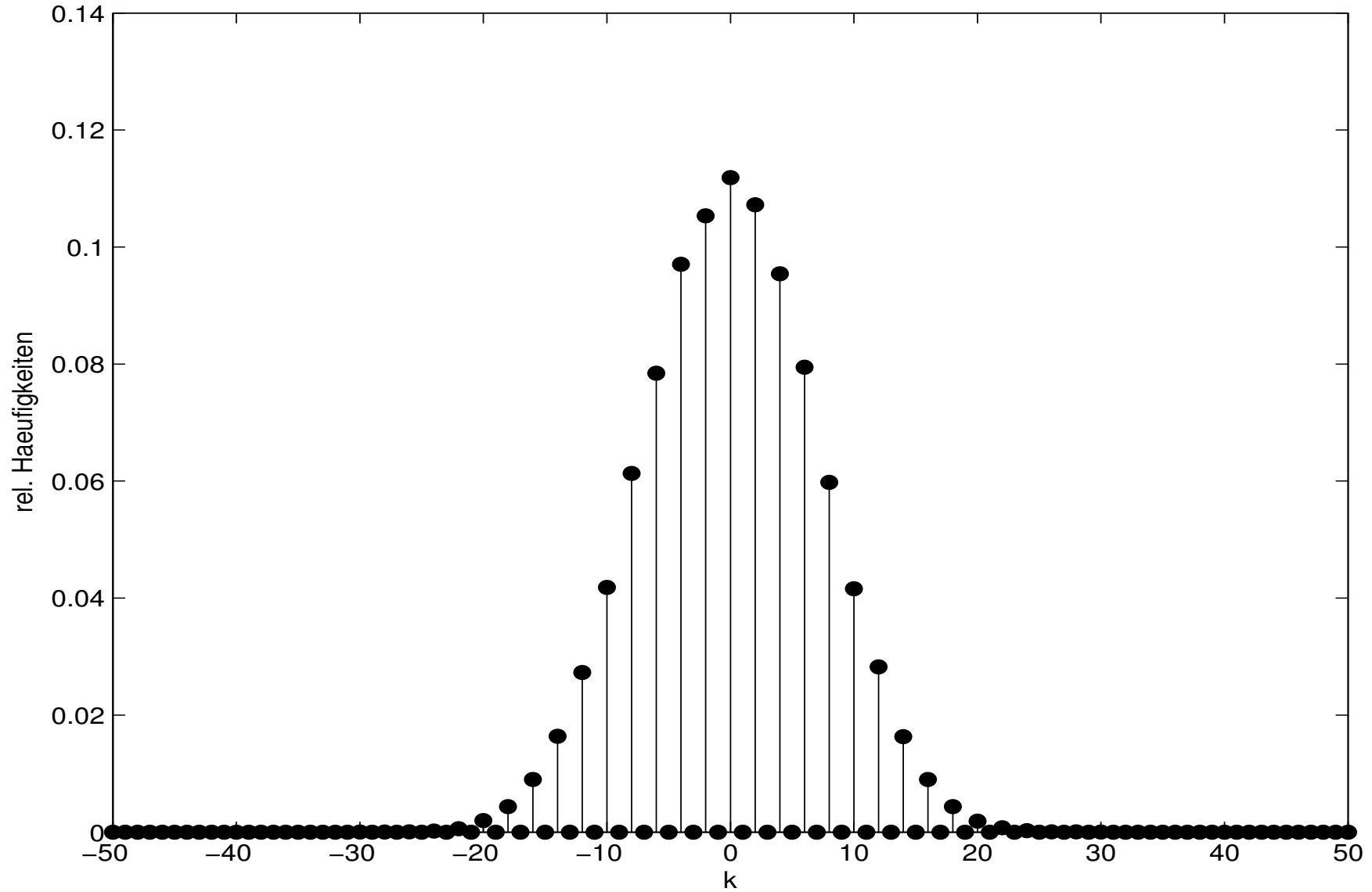
$n = 1000$

Simulation der Verteilung: Position der Irrfahrt nach T Schritten. T=50, n=1000



$n = 100000$

Simulation der Verteilung: Position der Irrfahrt nach T Schritten. T=50, n=100000



**36. Satz** Für  $x \in \{-T, -T + 2, \dots, T - 2, T\}$

$$P'(\{S'_T = x\}) = \binom{T}{(x+T)/2} \cdot 2^{-T}.$$

*Beweis.* Es gilt

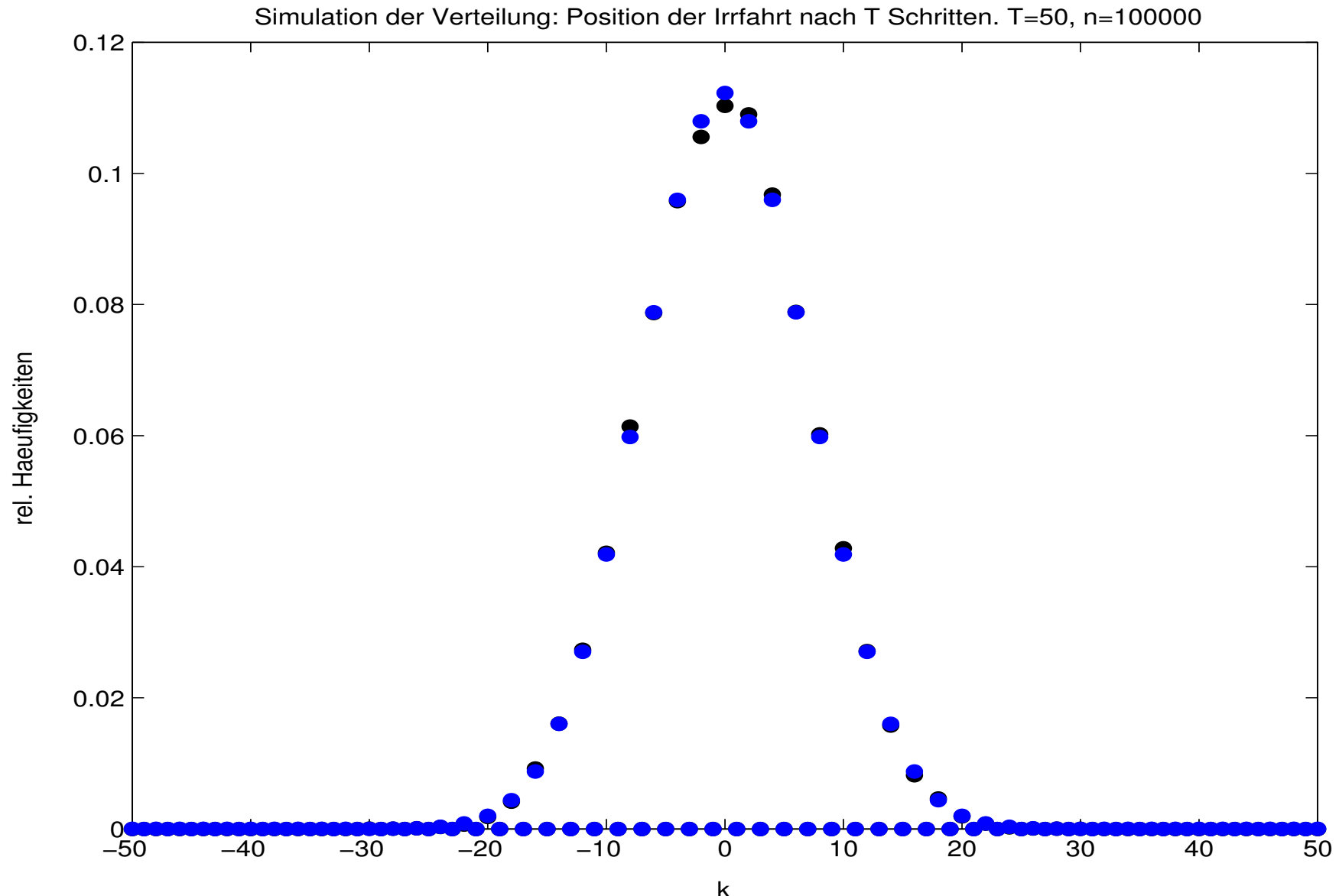
$$S'_T = \sum_{j=1}^T Y'_j = 2 \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^T \underbrace{(Y'_j + 1)/2}_{=: U'_j}}_{=: R'},$$

und  $U'_1, \dots, U'_T$  sind iid mit  $U'_1 \sim \mathbf{B}(1, 1/2)$ . Es folgt  $R' \sim \mathbf{B}(T, 1/2)$  und

$$P'(\{S'_T = x\}) = P'(\{R' = (x+T)/2\})$$



Vergleich der Simulationsergebnisse (schwarz) mit den exakten Werten (blau) für  $n = 100000$



**Bezeichnung**  $a_k \approx b_k$  für Folgen von Zahlen  $a_k, b_k > 0$ , falls

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k / b_k = 1.$$

**37. Korollar** Sei  $T = 2k$  gerade. Dann

$$P'(\{S'_T = 0\}) \approx \sqrt{2/(\pi T)}.$$

*Beweis.* Stirlingsche Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \cdot (k/e)^k,$$

siehe Krengel (2003, p. 76) und TUTORIUM T2:1. Also folgt mit Satz 36

$$\begin{aligned} P'(\{S'_T = 0\}) &= 2^{-T} \cdot \binom{T}{T/2} \\ &\approx 2^{-T} \cdot \frac{\sqrt{2\pi T} \cdot T^T \cdot \exp(-T)}{\left(\sqrt{2\pi T/2} \cdot (T/2)^{T/2} \cdot \exp(-T/2)\right)^2} \\ &= \sqrt{2/(\pi T)}. \end{aligned}$$

□

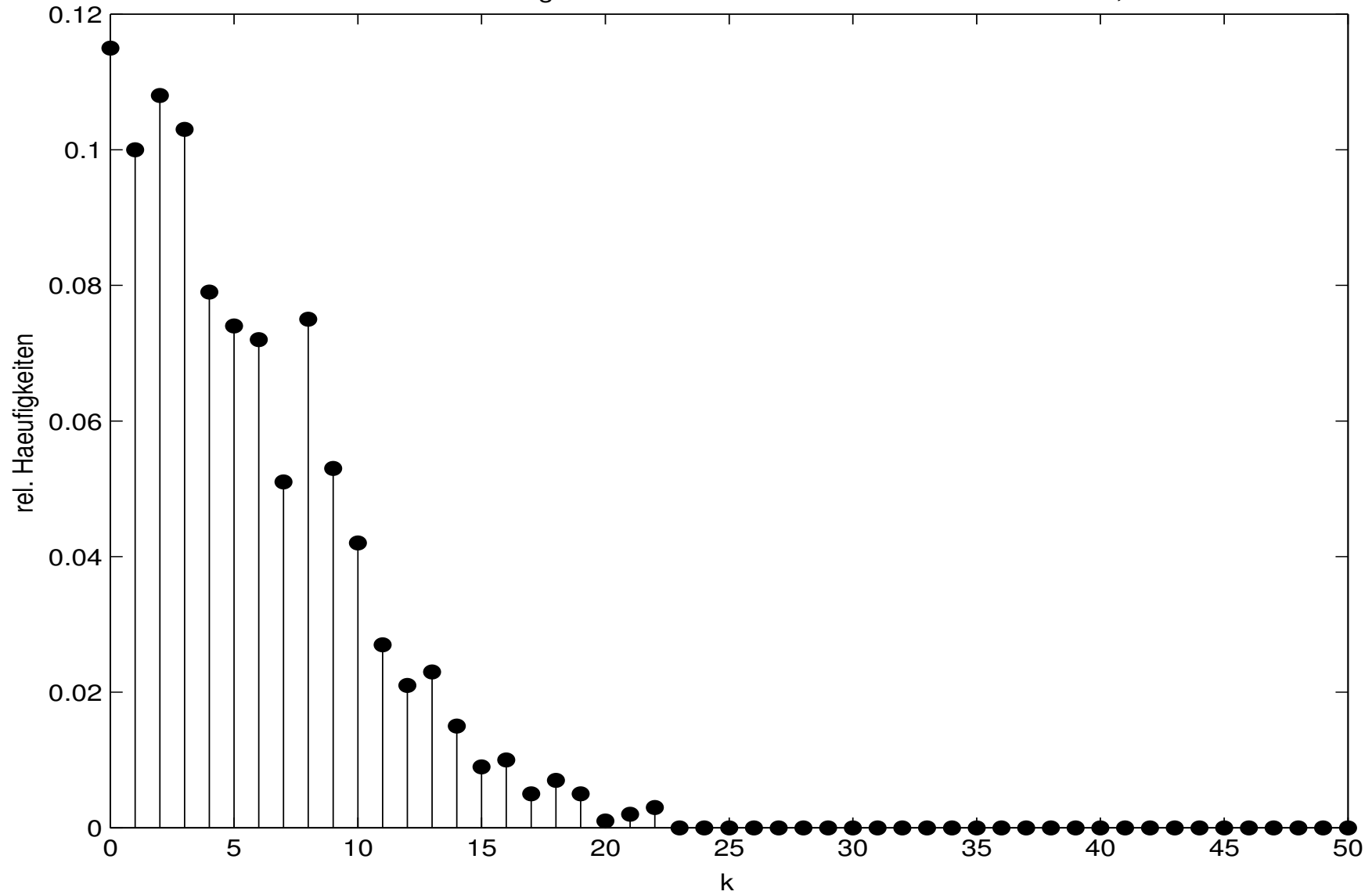
### 38. Beispiel Approximative Berechnung von

$$P'(\{\max_{t=0,\dots,T} S'_t = x\})$$

für  $x = 0, \dots, T$ .

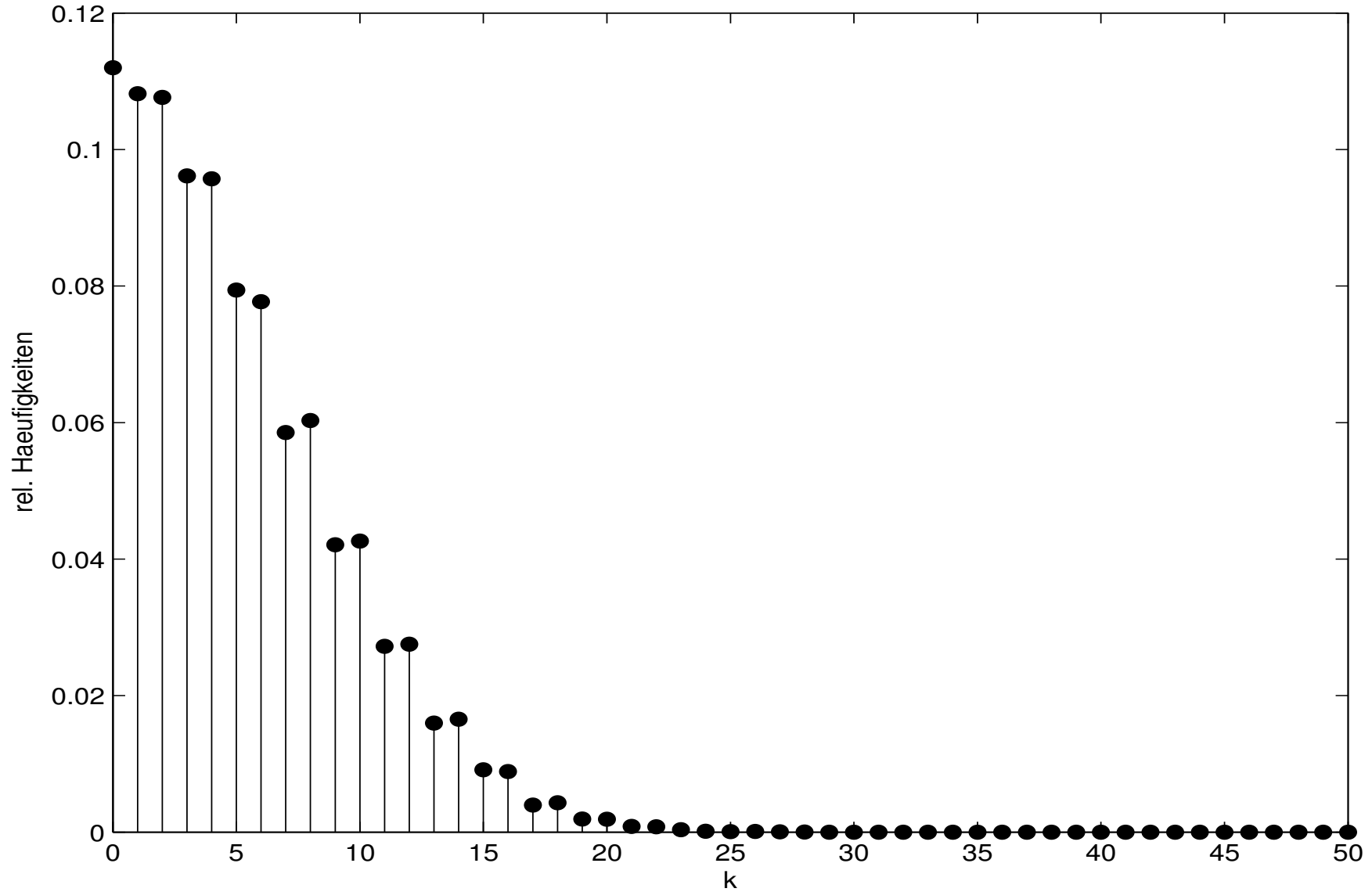
$n = 1000$

Simulation der Verteilung: Maximum der Irrfahrt nach T Schritten. T=50, n=1000



$n = 100000$

Simulation der Verteilung: Maximum der Irrfahrt nach T Schritten. T=50, n=100000



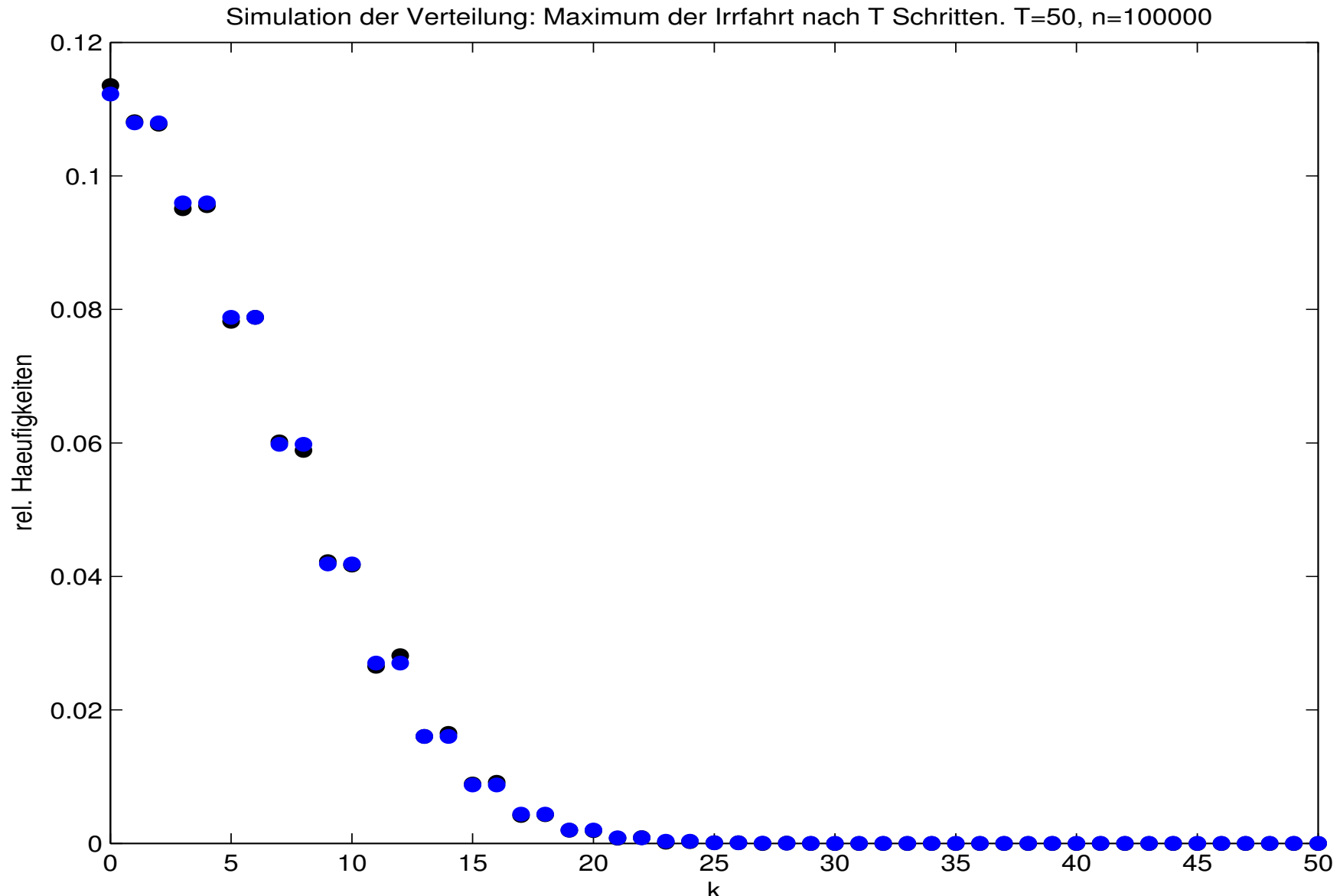
**39. Satz** Für  $x \in \{0, \dots, T\}$

$$\begin{aligned} P'(\{\max_{t=0, \dots, T} S'_t = x\}) \\ = P'(\{S'_T = x\}) + P'(\{S'_T = x + 1\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* TUTORIUM

□

Vergleich der Simulationsergebnisse (schwarz) mit den exakten Werten (blau) für  $n = 100000$





Im folgenden

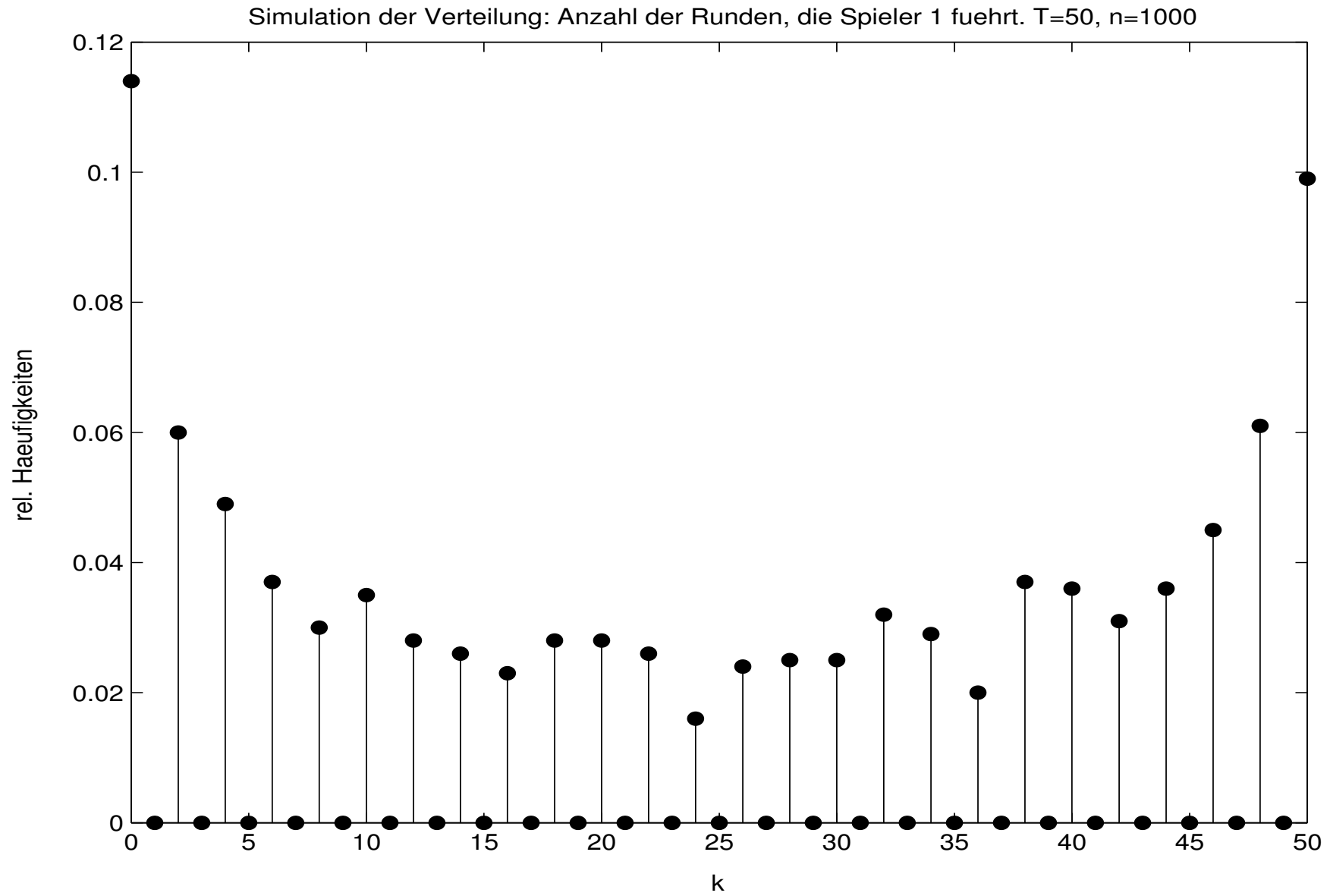
$$X' := |\{t \in \{1, \dots, T\} : S'_t \geq 0 \text{ und } S'_{t-1} \geq 0\}|.$$

**40. Beispiel** Approximative Berechnung von

$$P'(\{X' = x\})$$

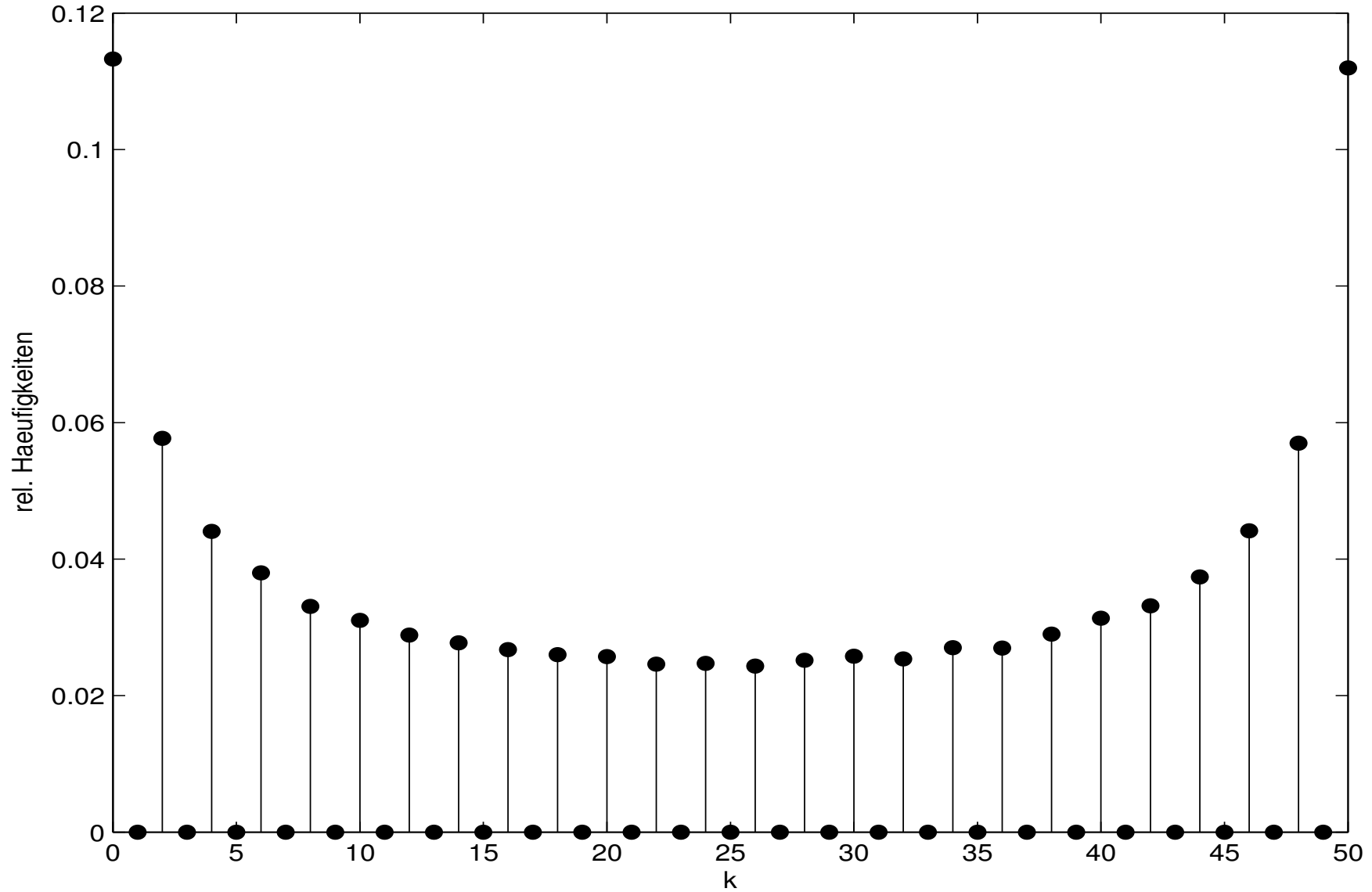
für  $x = 0, \dots, T$ .

$n = 1000$



$n = 100000$

Simulation der Verteilung: Anzahl der Runden, die Spieler 1 fuehrt. T=50, n=100000



**41. Bemerkung**  $P'(\{X' = x\}) = 0$ , falls  $T$  gerade und  $x$  ungerade.

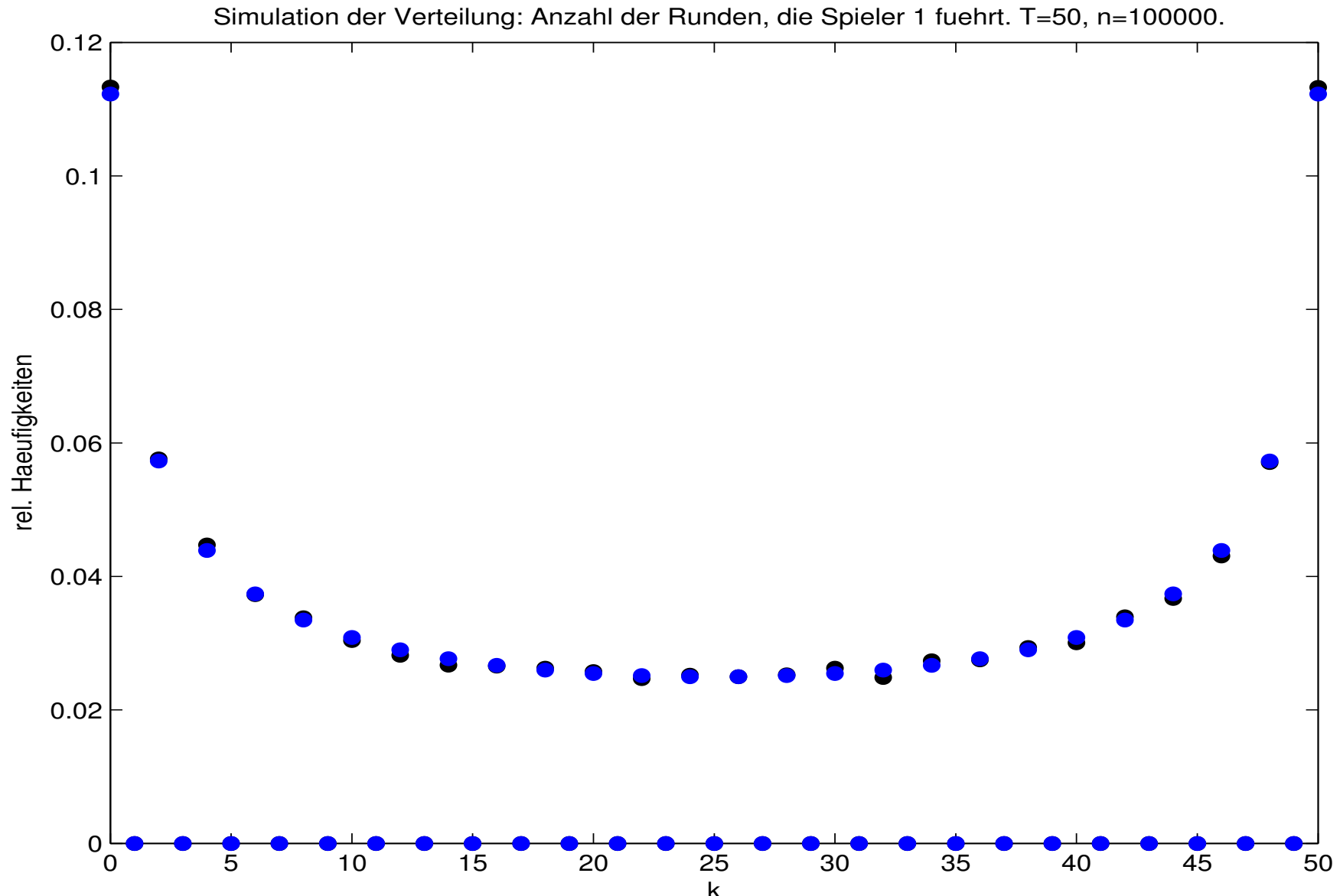
**42. Satz** Sei  $T$  gerade. Für  $y \in \{0, \dots, T/2\}$

$$\begin{aligned} P'(\{X' = 2y\}) \\ = P'(\{S'_{2y} = 0\}) \cdot P'(\{S'_{T-2y} = 0\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* TUTORIUM

□

Vergleich der Simulationsergebnisse (schwarz) mit den exakten Werten (blau) für  $n = 100000$



**43. Korollar** Sei  $T$  durch 4 teilbar. Dann

$$\frac{P'(\{X' = T\})}{P(\{X' = T/2\})} \approx \sqrt{\pi T/8}.$$

*Beweis.* Satz 42 und Korollar 37 zeigen

$$\frac{P'(\{X' = T\})}{P(\{X' = T/2\})} = \frac{P'(\{S'_T = 0\})}{\left(P'(\{S'_{T/2} = 0\})\right)^2} \approx \frac{\sqrt{2/(\pi T)}}{4/(\pi T)} = \sqrt{\pi T/8}.$$

**44. Beispiel** Für  $T = 1000$  gilt

$$\sqrt{\pi T/8} = 19,8166\dots$$

und

$$\frac{P'(\{X' = T\})}{P(\{X' = T/2\})} = 19,8315\dots$$