

4 Zufallszahlen

Praktische Durchführung der stochastischen Simulation beruht auf **Zufallszahlengeneratoren**, d.h. auf geeigneten

Abbildungen $f : K \rightarrow K$, wobei $K := \{0, \dots, k - 1\}$ und k sehr groß, etwa $k = 2^{128}$ oder $k = 2^{19937}$.

Man erhält endliche Folgen $v_1, v_2, \dots \in K$ durch

- Initialisierung $v_0 \in K$,
- Iteration $v_\ell := f(v_{\ell-1})$.

„Kleine“ Abschnitte dieser Folgen „verhalten sich annähernd“ wie Realisierungen von iid-ZVen, die jeweils gleichverteilt auf K sind.

25. Definition ZV U **gleichverteilt** auf $[0, 1]$, falls

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Bez.: $U \sim \mathbf{U}([0, 1])$.

26. Bemerkung Für $U \sim \mathbf{U}([0, 1])$, $x \in \mathbb{R}$ und Intervall M mit Endpunkten $0 \leq a < b \leq 1$:

$$P(\{U = x\}) = 0$$

$$P(\{U \in M\}) = F_U(b) - F_U(a) = b - a$$

Insbesondere ist $U \sim \mathbf{U}([0, 1])$ keine diskrete ZV.

In Bsp. 23: zugrundeliegende Verteilungsfunktion F_U .

Siehe Kapitel V.2 zur Frage der Existenz.

Zurück zu den Zufallszahlen $v_1, v_2, \dots \in K$.

Setze $u_\ell := v_\ell/k$. „Kleine Abschnitte“ der Folgen

$u_1, u_2, \dots \in [0, 1[$ „verhalten sich annähernd“ wie

Realisierungen von iid-ZVen, die jeweils gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind.

Kurz: u_1, u_2, \dots **gleichverteilte Zufallszahlen** in $[0, 1]$.

In dieser Vorlesung: Zufallszahlengenerator als black-box.

Verwendung etwa in der Form

- Initialisierung `init(u0)`,
- Iteration `u := rand()`.

Stochastische Simulation (Monte-Carlo-Algorithmen) und
Zufallszahlengeneratoren Gegenstand eigener Vorlesungen.

Siehe auch Hesse (2003, Kap. 10).

27. Bemerkung Die Entwicklung des Computers und militärische Anwendungen setzten zur Mitte des letzten Jahrhunderts eine rapide Entwicklung der stochastischen Simulation in Gang. Den Namen 'The Monte Carlo Method' trägt ein Tagungsband aus dem Jahr 1951, aus dem wir hier zitieren. John von Neumann (1951) war der folgenden Ansicht:

We see then that we could build a physical instrument to feed random digits directly into a high-speed computing machine and could have the control call for these numbers as needed.

Von Neumann fährt fort mit einem Einwand gegen diesen „echten“ Zufall, der uns auch heute noch einleuchtet:

The real objection to this procedure is the practical need for checking computations. If we suspect that a calculation is wrong, almost any reasonable check involves repeating something done before.

Zum Einsatz von auf deterministischen Methoden basierender
Generatoren sagt von Neumann in derselben Arbeit:

*Any one who considers arithmetical methods of
producing random digits is, of course, in a state of sin.*

Frage: Simulation „komplizierter“ Verteilungen.

Eine „universelle“ Möglichkeit: **Inversionsmethode**.

Gegeben:

- $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit Eigenschaften (i)–(iii) aus Satz 14,
- ZV $U \sim \mathbf{U}([0, 1])$

Definiere $T_F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_F(u) := \begin{cases} \inf\{v \in \mathbb{R} : F(v) \geq u\}, & \text{falls } u \in]0, 1[\\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

28. Satz $X := T_F \circ U$ ist ZV mit $F_X = F$.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}$ und $u \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} T_F(u) \leq x &\Leftrightarrow \inf\{v \in \mathbb{R} : F(v) \geq u\} \leq x \\ &\Leftrightarrow F(x) \geq u. \end{aligned}$$

Also

$$\{X \leq x\} = \{U \in]0, 1[\} \cap \{F(x) \geq U\} \cup \underbrace{\{U \notin]0, 1[\} \cap \{0 \leq x\}}_{\in \{\emptyset, \Omega\}},$$

so daß insbesondere $\{X \leq x\} \in \mathfrak{A}$. Weiter

$$P(\{X \leq x\}) = P(\{F(x) \geq U\}) = F(x).$$

□

29. Bemerkung Die Sätze 14 und 28 zeigen:

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ genau dann Verteilungsfunktion einer
 ZV , wenn F die Eigenschaften (i)–(iii) erfüllt.

Also Modellierung eines beliebigen Zufallsexperimentes mit reellwertigen
Ergebnissen durch Vorgabe der Verteilungsfunktion F .

30. Bemerkung **Inversionsmethode**: Simulation einer ZV mit
Verteilungsfunktion $F := F_X$ mittels Transformation

$$T_F(u_1), T_F(u_2), \dots$$

gleichverteilter Zufallszahlen in $[0, 1]$.