# 3 Der Satz von Glivenko-Cantelli

Nun: gleichzeitige Betrachtung der Mengen $M := ]-\infty, x]$, siehe Korollar 10.

Vermutung: Konvergenz gegen Verteilungfunktion $F_{X_1}$ in geeignetem Sinn.

**12. Bemerkung** Falls $X$ diskret mit $P(\{X \in D\}) = 1$ für $D \subset \mathbb{R}$ abzählbar,

$$F_X(x) = \sum_{y \in ]-\infty, x] \cap D} P(\{X = y\}).$$

Siehe Bsp. II.38.

**13. Beispiel** $P$ Gleichverteilung auf $\Omega := \{1, \ldots, n\}$ und $X(\omega) := \omega$. Dann:

$$F_X(x) = |\{X \leq x\}|/|\Omega| = |[1, x] \cap \Omega|/n$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1 \\ \lfloor x \rfloor / n, & \text{falls } 1 \leq x < n \\ 1, & \text{falls } x \geq n \end{cases}$$

**14. Satz** Für jede Verteilungsfunktion $F_X$ gilt:

(i) $F_X$ ist monoton wachsend

(ii) $F_X$ ist rechtsseitig stetig

(iii) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

Ferner gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$P(\{X = x\}) = F_X(x) - \lim_{y\to x-} F_X(y).$$

und

$$P(\{X = x\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_X \text{ stetig in } x.$$

*Beweis.* <u>ÜBUNG</u> □

**15. Definition** Für $q \in \left]0, 1\right[$ heißt

$$\inf\{v \in \mathbb{R} : F_X(v) \geq q\}$$

$q$-Quantil der Verteilungsfunktion $F_X$.

Speziell für $q = 1/2$: $z$ Median.

**16. Beispiel** <u>PROJEKTOR</u>

**17. Lemma** $z$ genau dann $q$-Quantil von $F_X$, wenn

$$F_X(z) \geq q \qquad \text{und} \qquad \forall y \in \mathbb{R} : \; y < z \Rightarrow F_X(y) < q.$$

*Beweis.* Da $F_X$ rechtsseitig stetig und monoton wachsend, ex. $\widetilde{z} \in \mathbb{R}$ mit

$$\{v \in \mathbb{R} : F_X(v) \geq q\} = \left[\widetilde{z}, \infty\right[.$$

Approximation (Problem A) bzw. Schätzung (Problem B) der zugrundeliegenden Vert'funktion.

**18. Definition** Empirische Verteilungsfunktion

$F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zu $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F_n(x; x_1, \ldots, x_n) := 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,x]}(x_i).$$

**19. Beispiel** PROJEKTOR

Im folgenden $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid. Sei $F := F_{X_1}$ die Vert'funktion jeder der ZVen $X_i$. Bei Problem A: $F$ „schwer" zu berechnen. Bei Problem B: $F$ unbekannt.

**20. Bemerkung** Korollar 10 zeigt für alle $x \in \mathbb{R}$, daß für fast alle $\omega$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x; X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) = F(x).$$

Verschärfung im folgenden Satz von Glivenko-Cantelli (Hauptsatz der Mathematischen Statistik): fast sicher gleichmäßige Konvergenz.

**21. Satz** Für fast alle $\omega$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x; X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) - F(x)| = 0.$$

*B*eweis. PROJEKTOR: vorab Spezialfall $F$ stetig, streng mon. wachsend.

Bezeichnungen:

$$G^{-}(x) := \lim_{y \to x-} G(y),$$

$$F_n(x, \omega) := F_n(x; X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)),$$

$$\mathfrak{E} := \{A \in \mathfrak{A} : P(A) = 1\}.$$

Fixiere $k \in \mathbb{N}$. Betrachte für $\ell = 1, \ldots, k-1$ die $\ell/k$-Quantile $z_{\ell,k}$ von $F$, setze ferner $z_{0,k} := -\infty$ und $z_{k,k} := \infty$.

Korollar 10 und Satz 14 zeigen

$$\forall \ell \in \{1, \ldots, k-1\}\, \exists A \in \mathfrak{E}\, \forall \omega \in A :$$

$$\lim_{n \to \infty} F_n^{(-)}(z_{\ell,k}, \omega) = F^{(-)}(z_{\ell,k}).$$

Für

$$\Delta_{n,k}(\omega) := \max_{\ell \in \{0,\ldots,k\}} \max\Big( \big| F_n(z_{\ell,k},\omega) - F(z_{\ell,k}) \big|, \\ \big| F_n^-(z_{\ell,k},\omega) - F^-(z_{\ell,k}) \big| \Big)$$

folgt

$$\exists A_k \in \mathfrak{E}\, \forall \omega \in A_k : \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,k}(\omega) = 0. \tag{1}$$

Lemma 17 zeigt

$$F^-(z_{\ell,k}) - F(z_{\ell-1,k}) \leq \ell/k - (\ell-1)/k = 1/k.$$

Hiermit folgt für $x \in \,]z_{\ell-1,k}, z_{\ell,k}[$ und $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}
F_n(x,\omega) &\leq F_n^-(z_{\ell,k},\omega) \leq F^-(z_{\ell,k}) + \Delta_{n,k}(\omega) \\
&\leq F(z_{\ell-1,k}) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega) \\
&\leq F(x) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega), \\
F_n(x,\omega) &\geq F_n(z_{\ell-1,k},\omega) \geq F(z_{\ell-1,k}) - \Delta_{n,k}(\omega) \\
&\geq F^-(z_{\ell,k}) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega) \\
&\geq F(x) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega).
\end{aligned}$$

Für $\omega \in A_k$ ergibt sich gemäß (1)

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x,\omega) - F(x)| \leq 1/k.$$

Fazit: für

$$A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$$

gilt

$$P(A) = 1$$

und

$$\forall \omega \in A: \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x, \omega) - F(x)| = 0.$$

$\square$

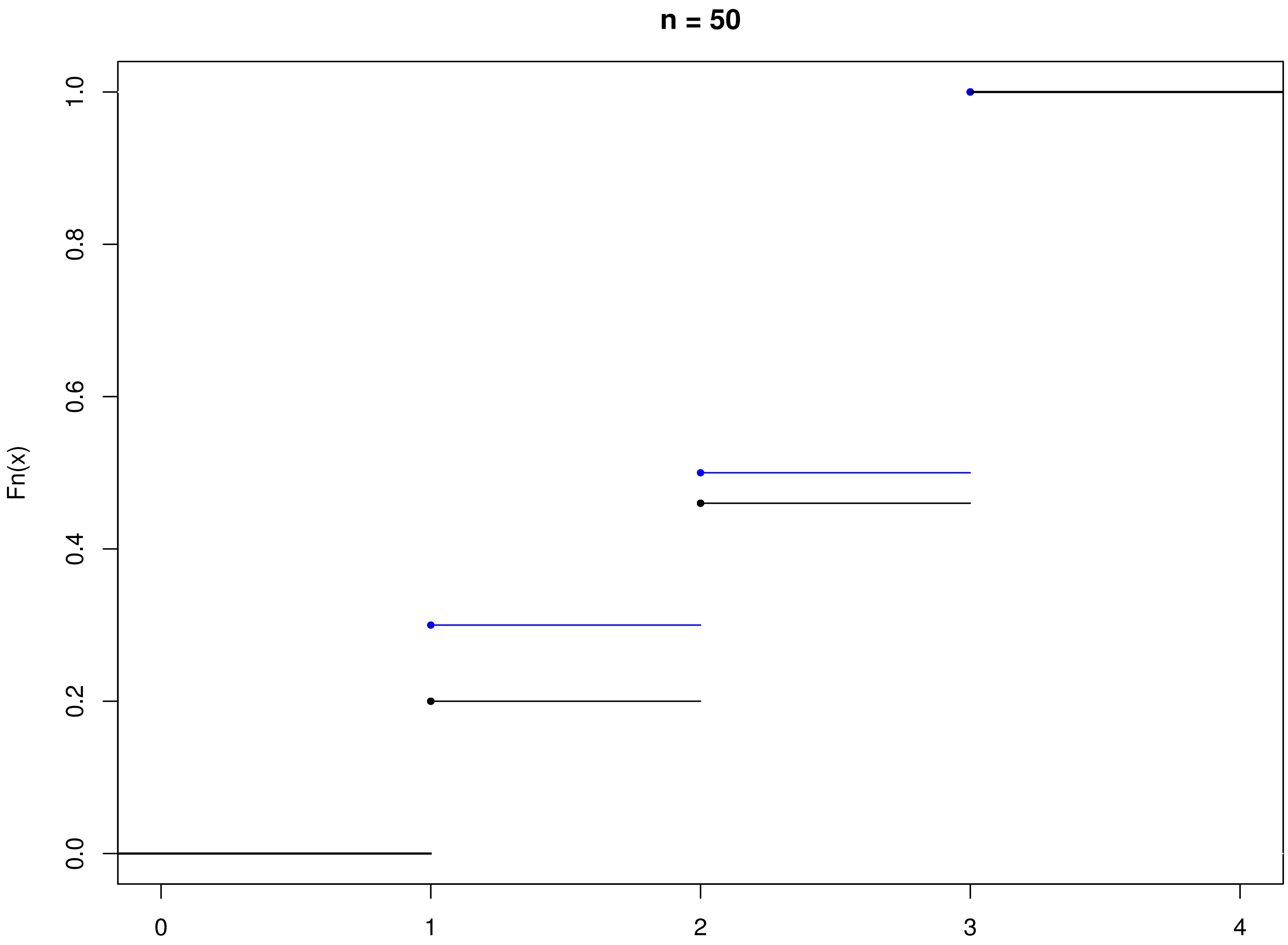
**22. Beispiel** Empirische Verteilungsfunktionen schwarz.

(Zugrundeliegende Verteilung gegeben durch

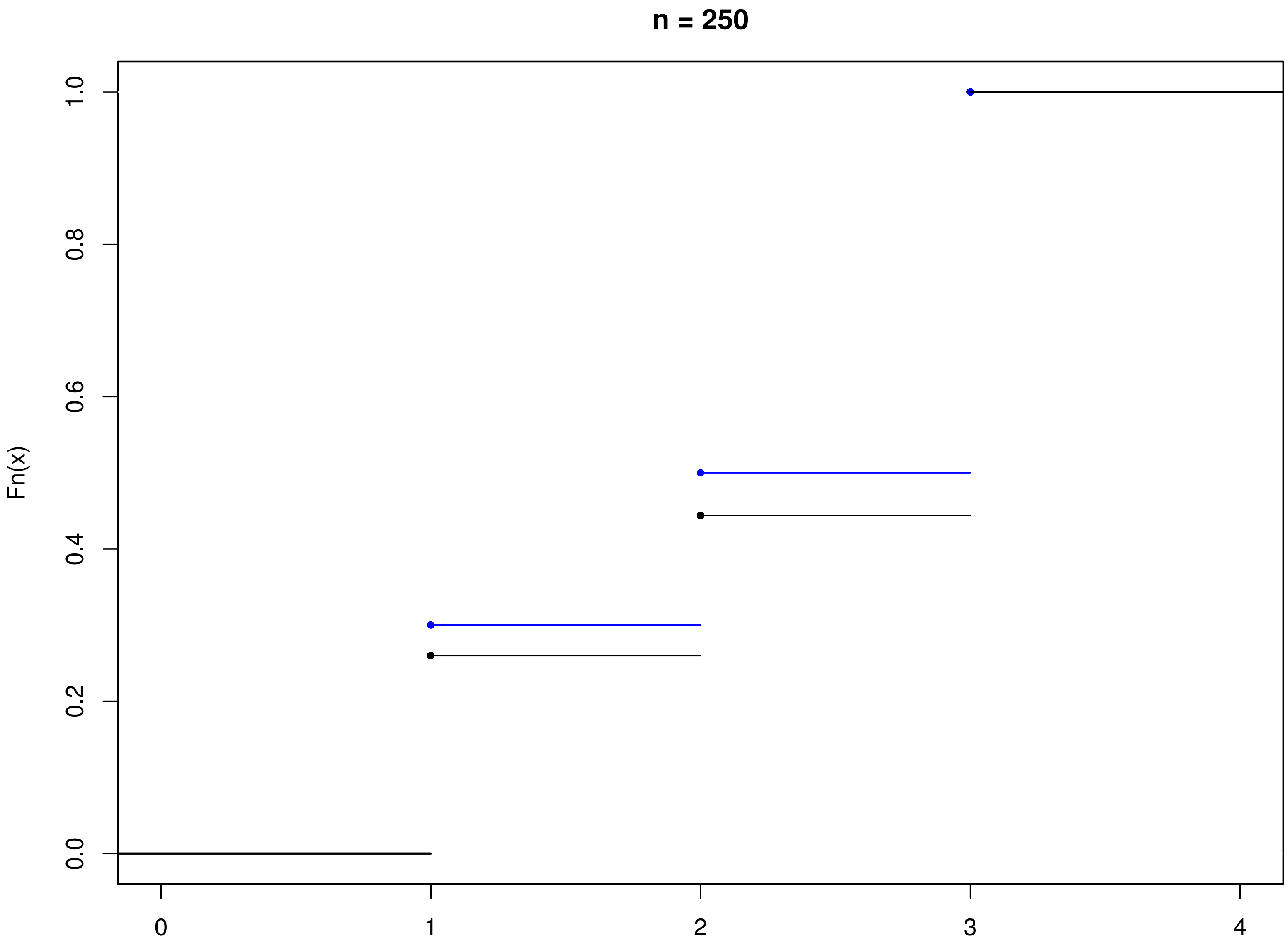
$$P(\{X_1 = 1\}) = 0,3$$
$$P(\{X_1 = 2\}) = 0,2$$
$$P(\{X_1 = 3\}) = 0,5$$

Verteilungsfunktion blau.)

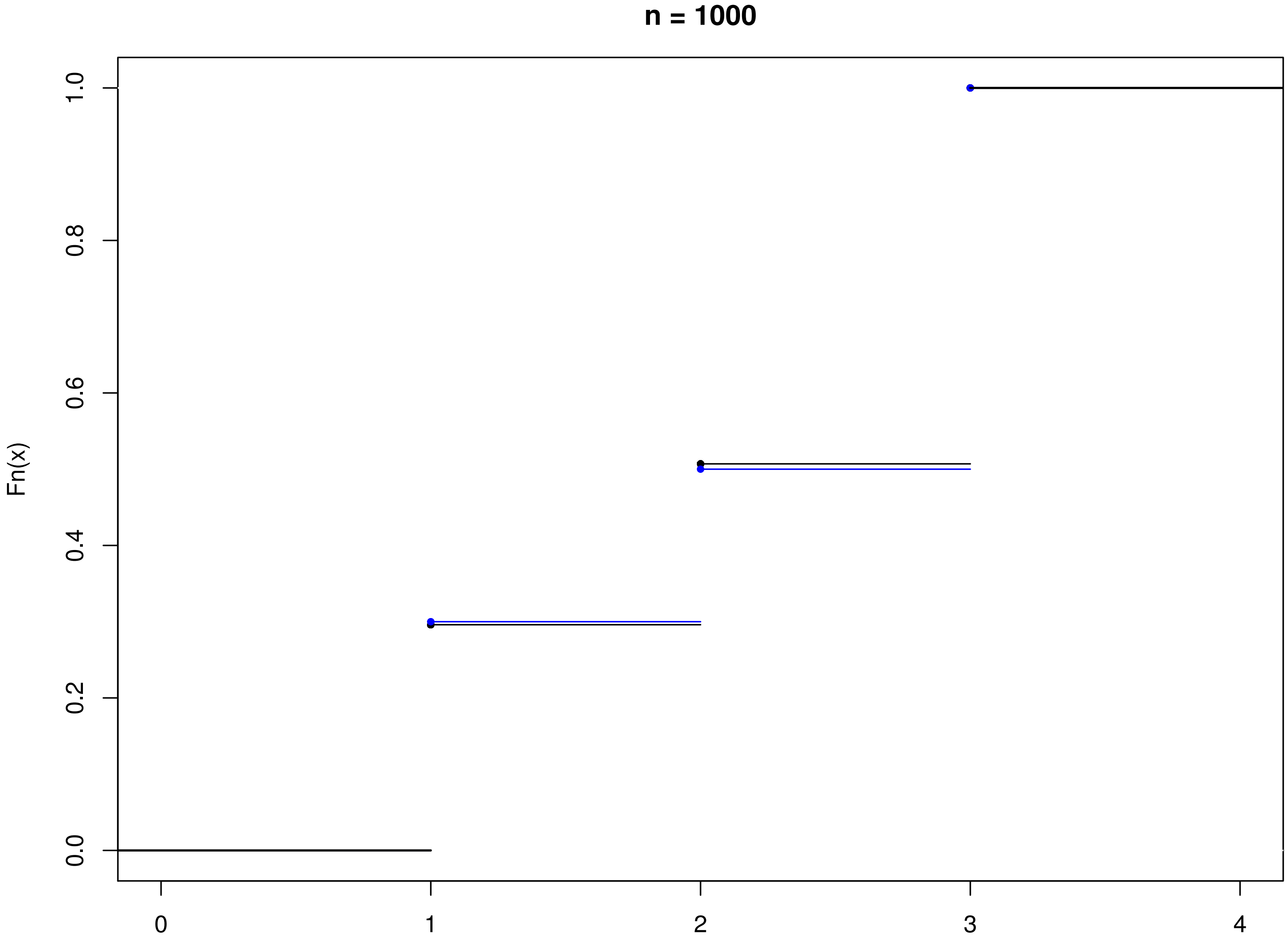
$n = 50$



$n = 250$



$n = 1000$

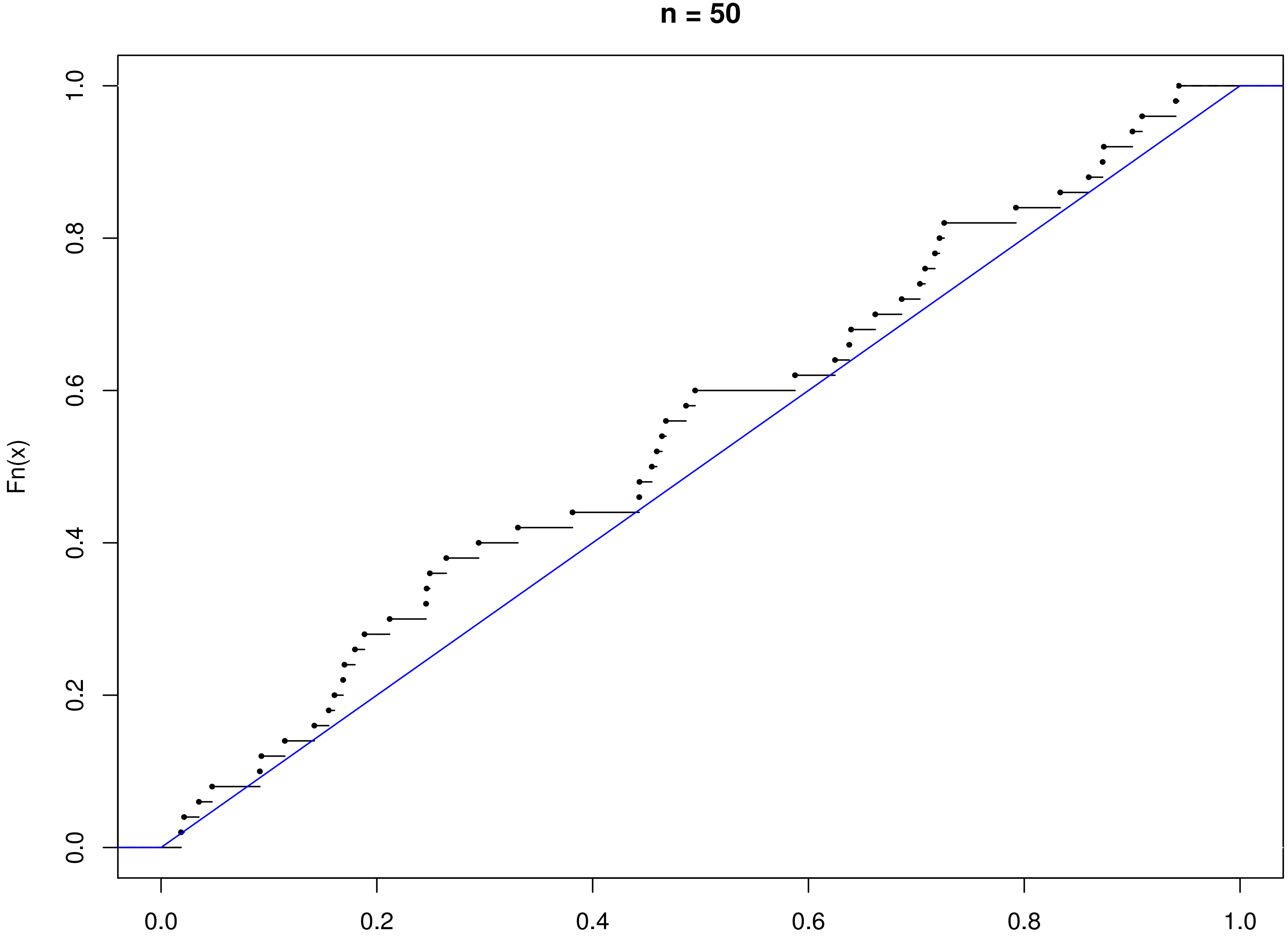


**23. Beispiel** Empirische Verteilungsfunktionen schwarz.

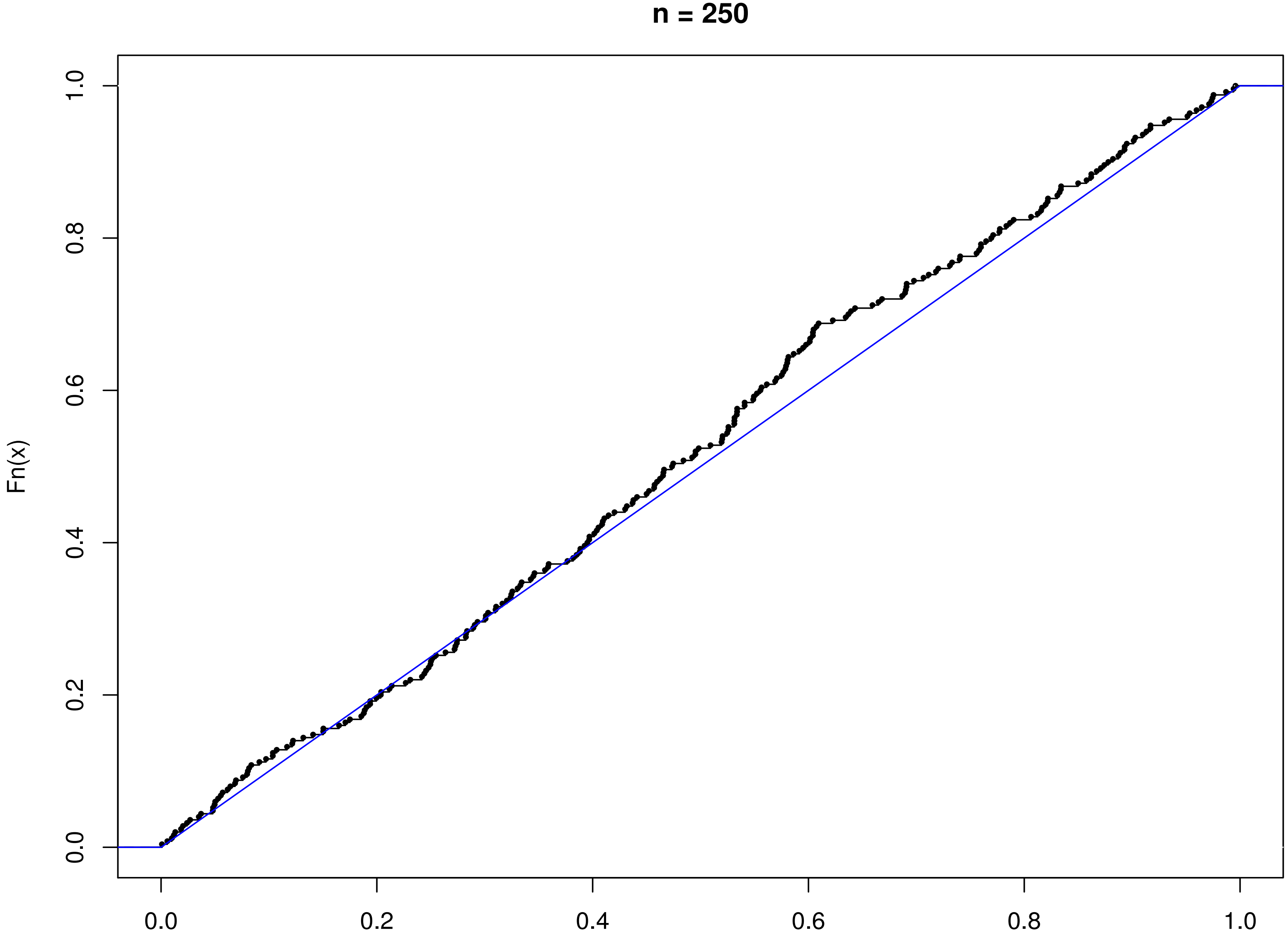
(Zugrundeliegende Verteilung gegeben durch

$X_1 \sim \mathbf{U}([0,1])$, siehe Def. 25, Verteilungsfunktion blau.)

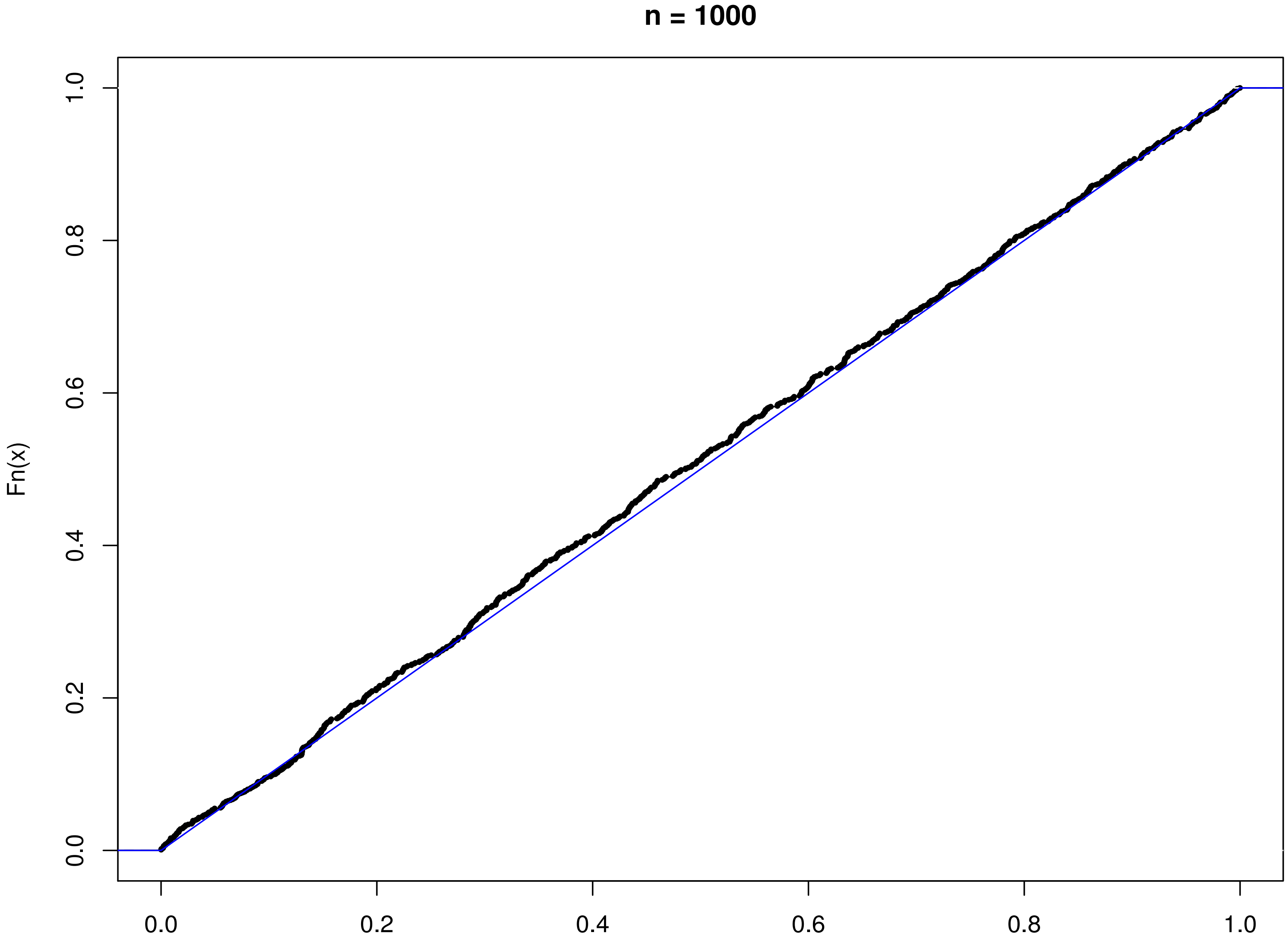
$n = 50$



$n = 250$



$n = 1000$

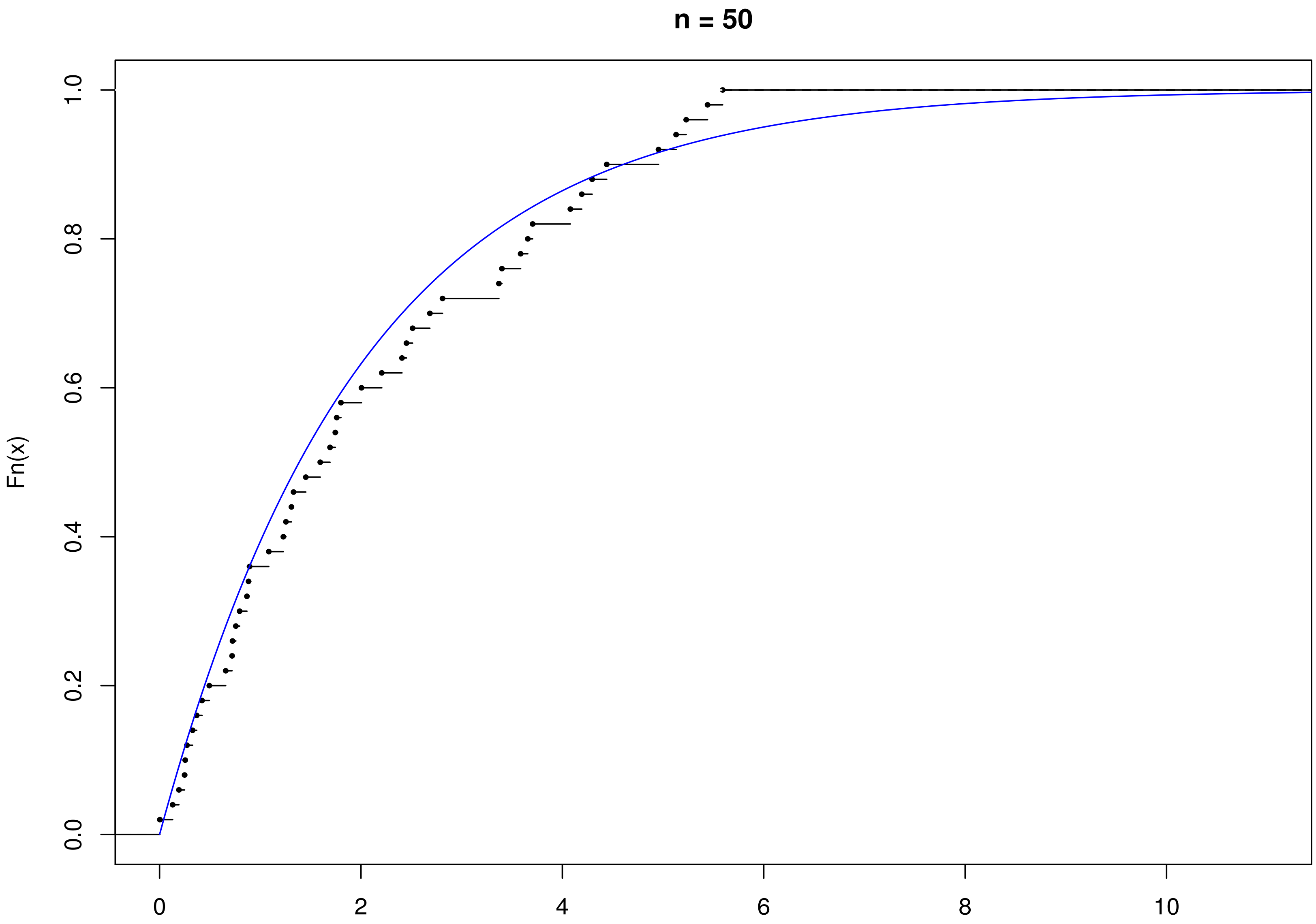


**24. Beispiel** Empirische Verteilungsfunktionen schwarz.

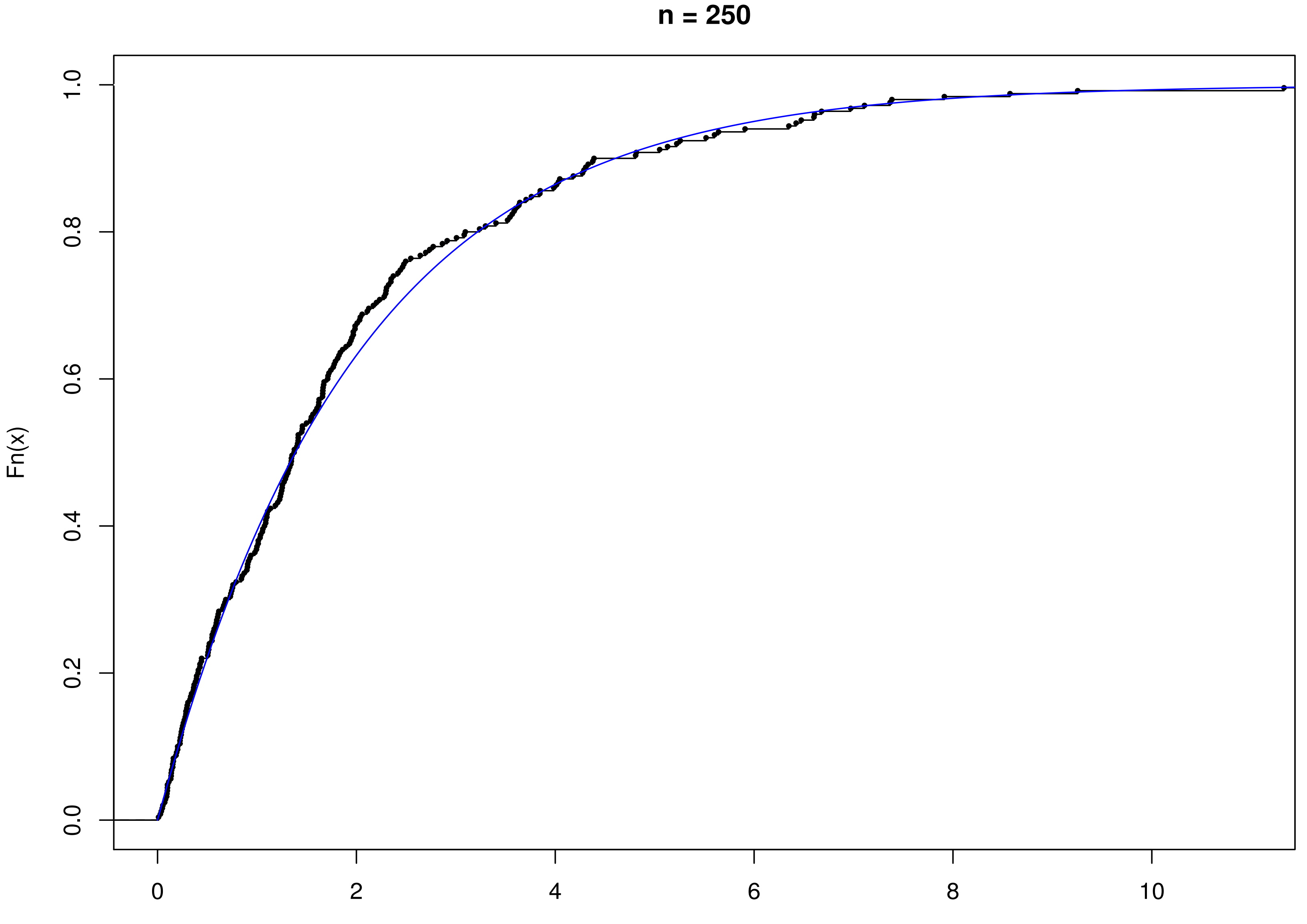
(Zugrundeliegende Verteilung gegben durch

$X_1 \sim \mathbf{Exp}(1/2)$, siehe Def. V.32, Verteilungsfunktion blau.)

$n = 50$



$n = 250$



$n = 1000$