2 Borels starkes Gesetz der großen Zahlen

7. Satz Sei $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $Z_1 \sim \mathrm{B}(1,p)$. Dann

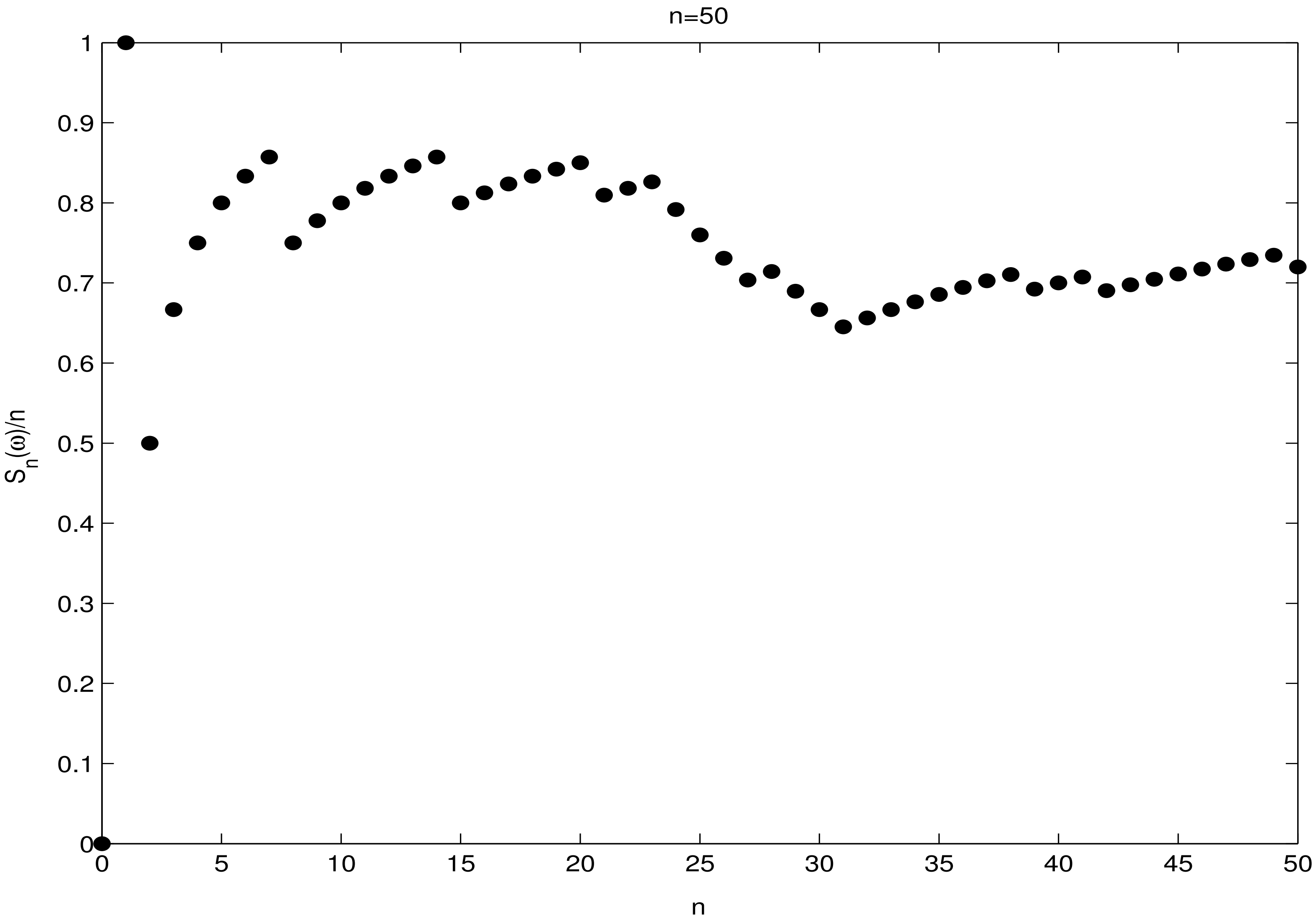
$$P\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) = p\Big\}\Big) = 1.$$

Beweis. Skiizze PROJEKTOR, Details TUTORIUM $\square$

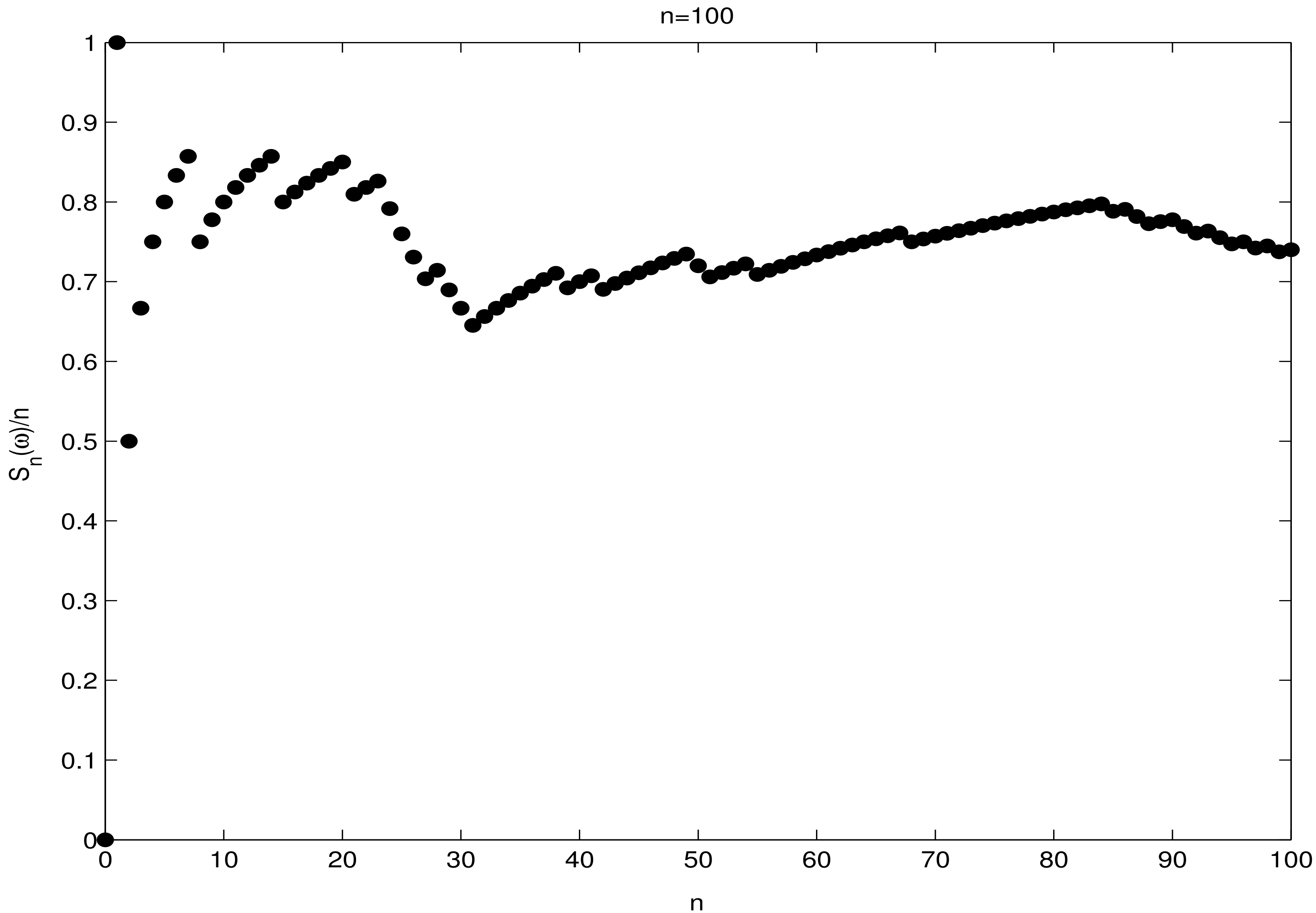
Siehe auch Satz VI.34. **Sprechweise**: eine Eigenschaft gilt für fast alle ω bzw. fast sicher, falls sie für alle ω aus einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) = 1$ gilt.

8. Beispiel Unabhängige, unendliche Folge von Münzwürfen.

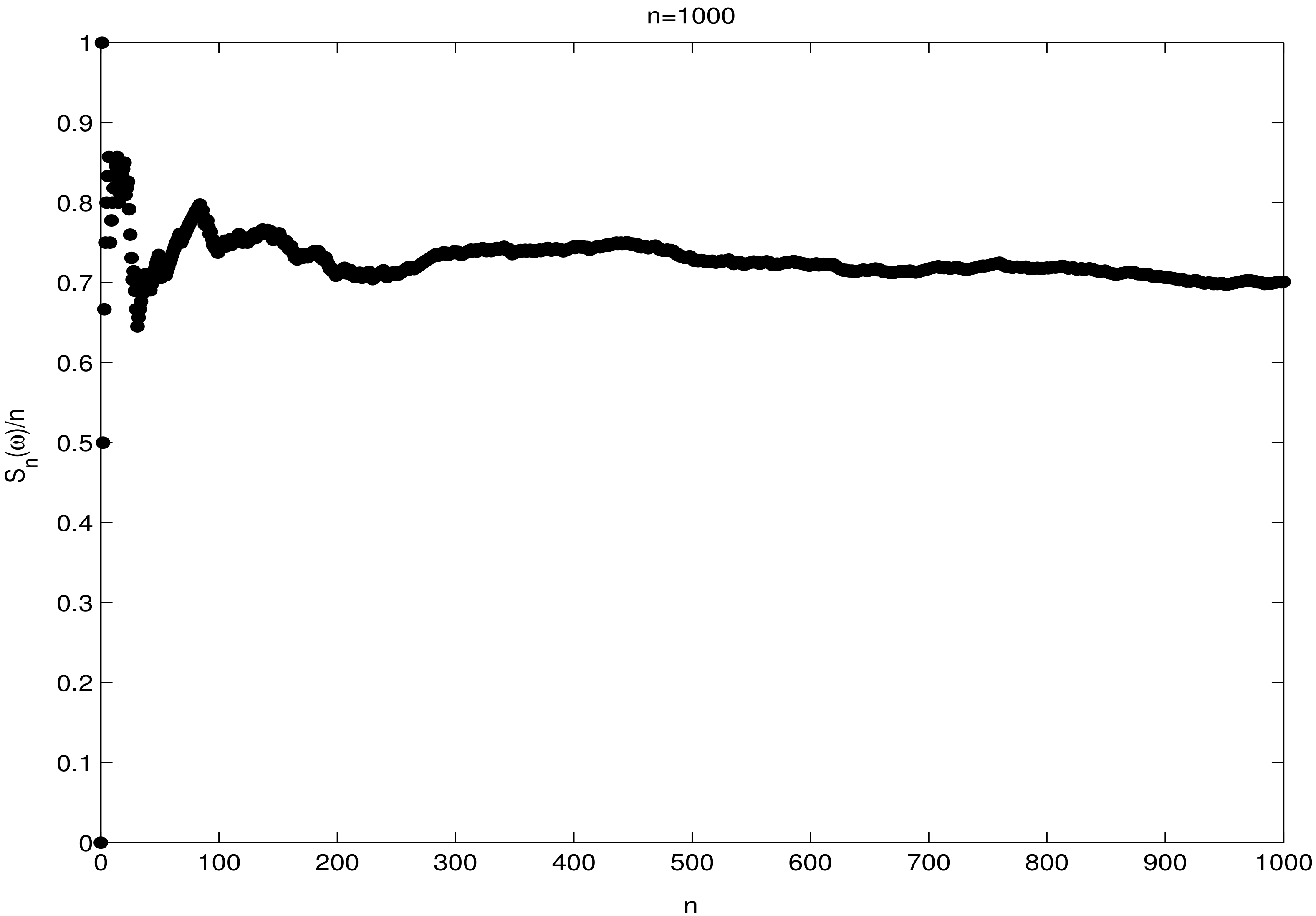
$Z_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7), n = 50.$



$Z_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7), n = 100.$



$Z_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7), n = 1000.$



10. Korollar Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $M \in \mathfrak{M}$. Dann gilt für fast alle ω

$$\lim_{n\to\infty} 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_M(X_i(\omega)) = P(\{X_1 \in M\})$$

Beweis. Für

$$Z_i := 1_M \circ X_i$$

gilt $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $Z_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ und $p = P(\{X_1 \in M\})$, siehe <u>Übung</u> M:H8, WInf:G6. Wende Satz 7 an. □

11. Bemerkung Damit

- **bei Problem A**: stochastische Simulation liefert für fast alle ω für „große" Anzahl n von Wiederholungen „gute" Näherung. Genauer gilt für eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) = 1$

$$\forall \omega \in A \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\omega, \varepsilon) \dots$$

- **bei Problem B**: theoretisches Gegenstück zur beobachteten Konvergenz.