# Kap. IV Stochastische Simulation und der Hauptsatz der Mathematischen Statistik

1. Problemstellungen und Methoden
2. Borels starkes Gesetz der großen Zahlen
3. Der Satz von Glivenko-Cantelli
4. Zufallszahlen
5. Anwendung: Simulation einer Irrfahrt

# 1 Problemstellungen und Methoden

**Problem A**: Gegeben: ZV $X'$ auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und $M \in \mathfrak{M}$.

Berechne $P'(\{X' \in M\})$.

**Problem B**: Gegeben: Daten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ als Resultate „unabhängiger“ Wiederholungen eines Zufallsexperimentes.

Gesucht: Stochastisches Modell für Einzelexperiment.

**1. Beispiel** Problem A. Erfolgswahrscheinlichkeit einer Strategie beim Patience-Spiel:

- $P'$ Gleichverteilung auf der Menge $\Omega'$ aller Permutationen von $\{1, \ldots, 52\}$ (Kartenverteilungen)
- $X' := 1_A$, wobei $A$ die Menge aller Kartenverteilungen, bei denen die Strategie gewinnt, und $M := \{1\}$

Somit

$$P'(\{X' \in M\}) = P'(A) = |A|/|\Omega'|.$$

Hier: $|\Omega'| = 52! = 8,06\ldots \cdot 10^{67}$, also $\Omega'$ sehr groß.

**2. Beispiel** Problem A. Durchgang von Neutronen durch Materie, siehe PROJEKTOR . Schließlich tritt einer dieser Fälle ein:

- Neutron wird von Abschirmung absorbiert, $X'(\omega) := 0$
- Neutron wird von Abschirmung reflektiert, $X'(\omega) := 1$
- Neutron passiert Abschirmung, $X'(\omega) := 2$

Gesucht ist $P'(\{X' = 2\})$.

Hier: $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und $X'$ „kompliziert".

**3. Beispiel** Problem B. Geschlecht eines Neugeborenen.

Anzahl der Daten $n = 25\,171\,123$ in Bsp. II.13.

Modell: $\mathbf{B}(1, p)$-verteilte ZV mit unbekanntem $p \in \,]0, 1[$.

Gesucht ist $p$.

**4. Beispiel** Problem B. Callcenter.

Daten: $x_1, \ldots, x_n$ Anzahl Anrufe an Tagen $i = 1, \ldots, n$.

Modell: $\mathbf{P}(\lambda)$-verteilte ZV mit unbekanntem $\lambda > 0$.

Gesucht ist $\lambda$.

**Stochastische Simulation zur Lösung von A**:

- Konstruiere iid-ZVen $X_1, \ldots, X_n$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei $X'$ und $X_1$ identisch verteilt

- „Erzeuge“ eine Realisierung $x_1, \ldots, x_n$ der ZVen $X_1, \ldots, X_n$, d.h. für ein $\omega \in \Omega$

$$x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega)$$

- Approximiere $P'(\{X' \in M\}) = P(\{X_1 \in M\})$ durch die relative Häufigkeit

$$1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_M(x_i)$$

**Formale Beschreibung von Problem B**:

- $X_1, \ldots, X_n$ iid-ZVen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei $P$ unbekannt.

  Jede dieser ZVen modelliert ein Einzelexperiment.

- Annahme: Daten $x_1, \ldots, x_n$ sind eine Realisierung der ZVen $X_1, \ldots, X_n$, d.h. für ein $\omega \in \Omega$

$$x_1 = X_1(\omega), \ldots, x_n = X_n(\omega)$$

**Methode zur Lösung von Problem B**:

- Schätze $P(\{X_1 \in M\})$ für $M \in \mathfrak{M}$ durch die relative Häufigkeit

$$1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_M(x_i)$$

**5. Beispiel** Problem B. Geschlecht eines Neugeborenen, siehe Hesse (2003, p. 24). PROJEKTOR

**6. Beispiel** Problem B. Münzwurf, siehe Hesse (2003, p. 241). PROJEKTOR

**Befund**: In beiden Beispielen scheinen die Folgen der relativen Häufigkeiten zu „konvergieren".