4 Diskrete Zufallsvariablen

Im folgenden $X, X_1, \ldots$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

20. Definition X diskrete Zufallsvariable, falls

$P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$.

21. Bemerkung $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ diskret $\Rightarrow X(\Omega)$ abzählbar

$\Rightarrow X$ diskret.

22. Beispiel Pfeiltreffer auf Dartscheibe, X Nummer des

getroffenen Sektors, siehe Beispiele II.15 und II.38.

23. Lemma Diskrete ZVen X, X' genau dann identisch verteilt, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; P(\{X = x\}) = P'(\{X' = x\}).$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Wende Satz II.40 an.
„$\Leftarrow$": Betrachte $D := X(\Omega) \cup X'(\Omega')$ im Beweis in Bsp. II.38 $\square$

24. Definition X Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$, falls $P(\{X = 1\}) = p$ und $P(\{X = 0\}) = 1 - p$.
Bez.: $X \sim \mathbf{B}(1, p)$.

25. Beispiel n gleichartige Produkte, voneinander unabhängig

- mit Wahrscheinlichkeit p funktionstüchtig
- mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ defekt.

Hierbei $p \in [0, 1]$, z.B. empirisch bestimmt als relative Häufigkeit.

Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß genau k Produkte funktionstüchtig sind.

Daraus durch Summation: W'keit, daß mindestens k Produkte funktionstüchtig sind.

Konkretes Modell: Produktexperiment mit $\Omega_i := \{0, 1\}$ und

$$f_i(\omega_i) := \begin{cases} p, & \text{falls } \omega_i = 1 \\ 1 - p, & \text{falls } \omega_i = 0. \end{cases}$$

Also $\Omega := \{0, 1\}^n$ Menge der Produktionsergebnisse und für $\omega \in \Omega$

$$f(\omega) := f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n).$$

Berechne bzgl. des Produktmaßes P

$$P(\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}).$$

Abstraktes Modell: $X_1, \dots, X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$.

Im konkreten Modell: $X_i(\omega) = \omega_i$.

Anzahl funktionstüchtiger Produkte

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Berechne

$$P(\{X = k\}).$$

Modellierung analog bei n-fachem Münzwurf oder n Geburten, X Anzahl der geworfenen K bzw. Anzahl der weiblichen Neugeborenen.

26. Satz Seien $X_1, \ldots X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Ferner sei

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dann gilt für $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}. \tag{3}$$

27. Definition X binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, falls (3) für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.

Bez.: $X \sim \mathbf{B}(n, p)$.

Beweis von Satz 26. Es gilt

$$P(\{(X_1, \ldots, X_n) \in \{0,1\}^n\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in \{0,1\}\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in \{0,1\}\}) = 1.$$

Setze

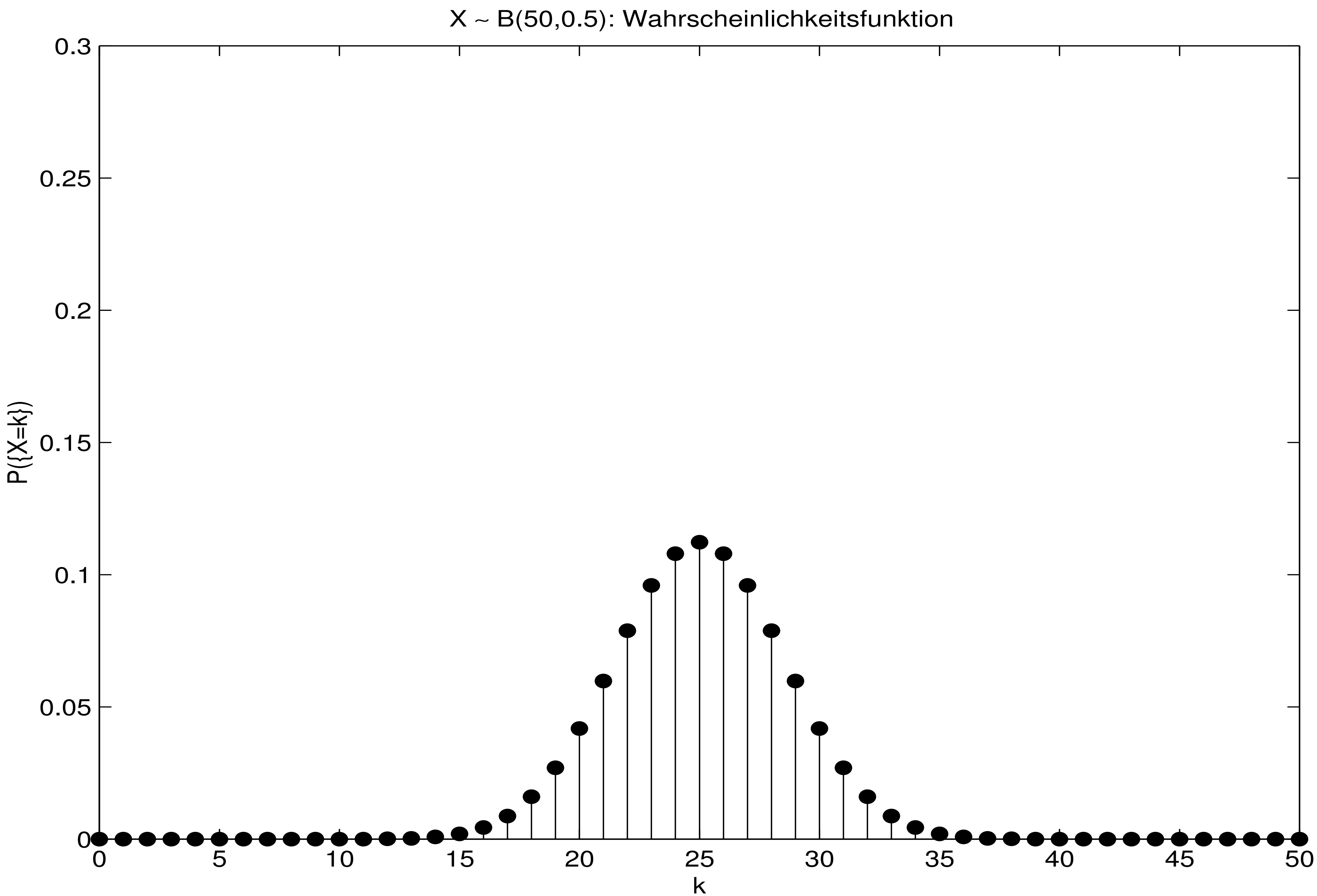
$$A_k := \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = k\}.$$

Damit folgt für $k \in \{0, \ldots, n\}$

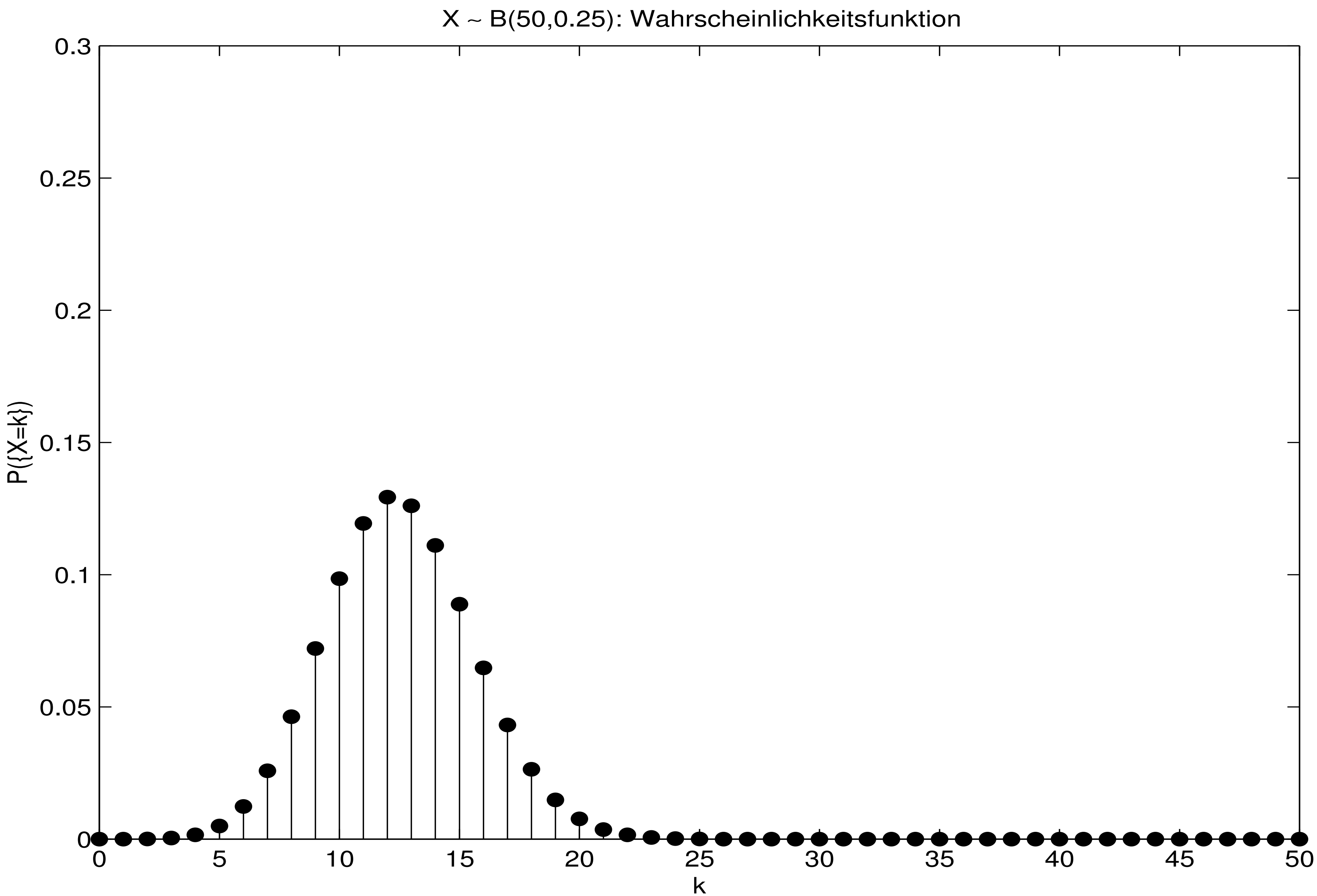
$$
\begin{aligned}
P(\{X = k\}) &= P\Big(\{X = k\} \cap \bigcup_{x \in \{0,1\}^n} \{(X_1, \ldots, X_n) = x\}\Big) \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}^n} P(\{X = k\} \cap \{(X_1, \ldots, X_n) = x\}) \\
&= \sum_{x \in A_k} \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i = x_i\}) \\
&= |A_k| \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

$\square$

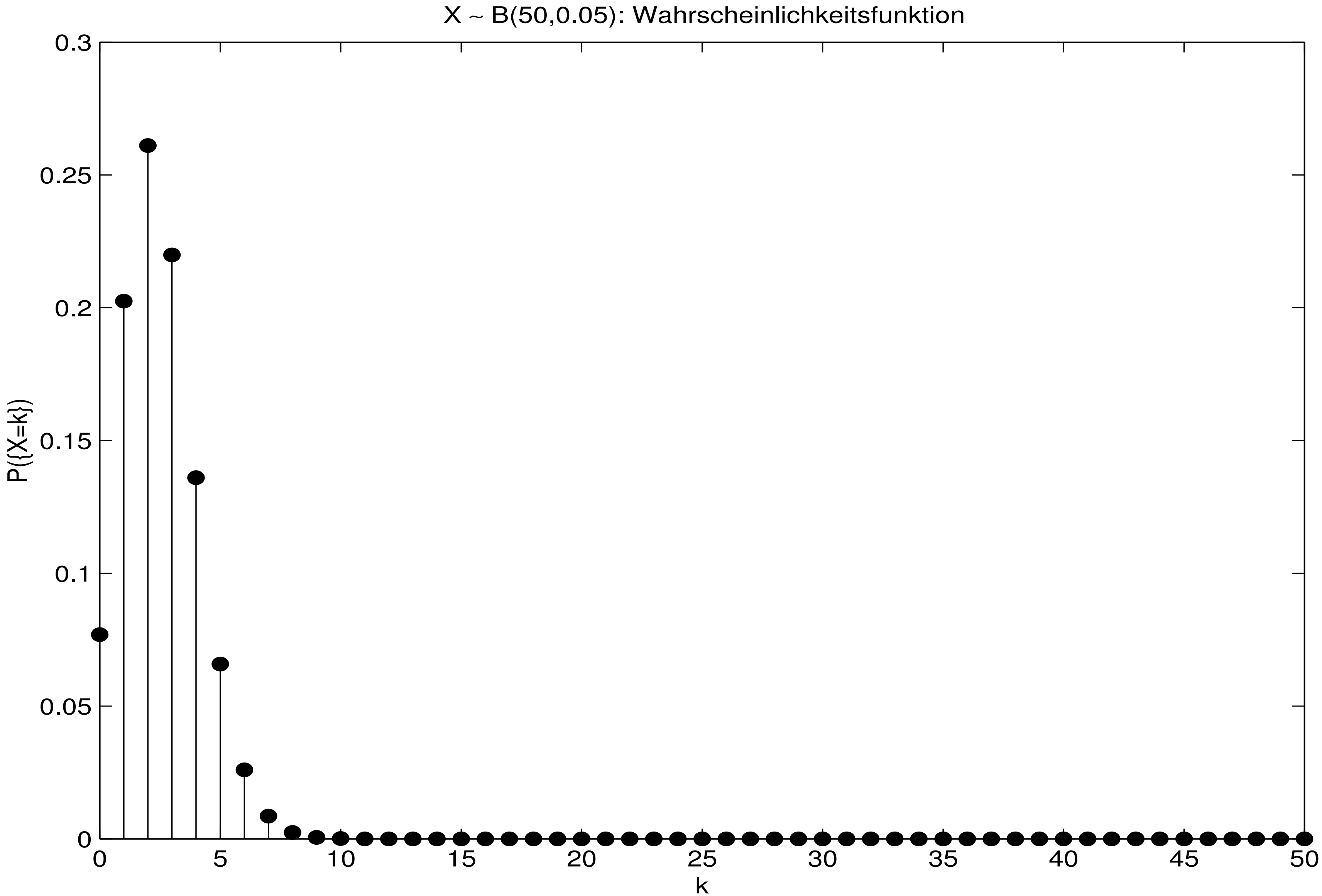
28. Beispiel $X \sim \mathrm{B}(50, 0.5)$



$X \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$



$X \sim \mathbf{B}(50, 0.05)$



29. Beispiel n Produkte, davon n_0 defekt. Gesucht:

Wahrscheinlichkeit, daß bei Auswahl von k Produkten genau ℓ Produkte defekt.

Modell: Gleichverteilung P auf

$$\Omega := \{K \subseteq N : |K| = k\}.$$

Berechne $P(A_\ell)$ für

$$A_\ell := \{K \in \Omega : |K \cap N_0| = \ell\},$$

wobei $N_0 \subseteq N$ fest gewählt mit $|N_0| = n_0$, d.h. bestimme $|\Omega|$ und $|A_\ell|$.

Es gilt: $|\Omega| = \binom{n}{k}$ und für

$$\ell \in \{\max(0, k-(n-n_0)), \ldots, \min(n_0, k)\},$$

daß

$$\begin{aligned}|A_\ell| = |\{(K_0, K_1) :\ & K_0 \subseteq N_0, |K_0| = \ell,\\ & K_1 \subseteq N \setminus N_0, |K_1| = k-\ell\}|\\ = \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n-n_0}{k-\ell}.&\end{aligned}$$

Also

$$P(A_\ell) = \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n-n_0}{k-\ell} \Big/ \binom{n}{k}.$$

Hiermit auch die Wahrscheinlichkeit, beim Skat genau 3 Asse zu erhalten:

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{7} / \binom{32}{10} = 66/899 = 0,0734\ldots$$

Ausblick auf statistische Fragestellungen. Bekannt

- Gesamtanzahl n der Produkte,
- Stichprobengröße k,
- Anzahl ℓ defekter Produkte in Stichprobe.

Unbekannt

- Gesamtanzahl n_0 defekter Produkte.

Aufgaben:

(i) Schätze n_0

(ii) Entscheide, ob $n_0/n \leq 0.02$

30. Definition X hypergeometrisch verteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \{0, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, falls

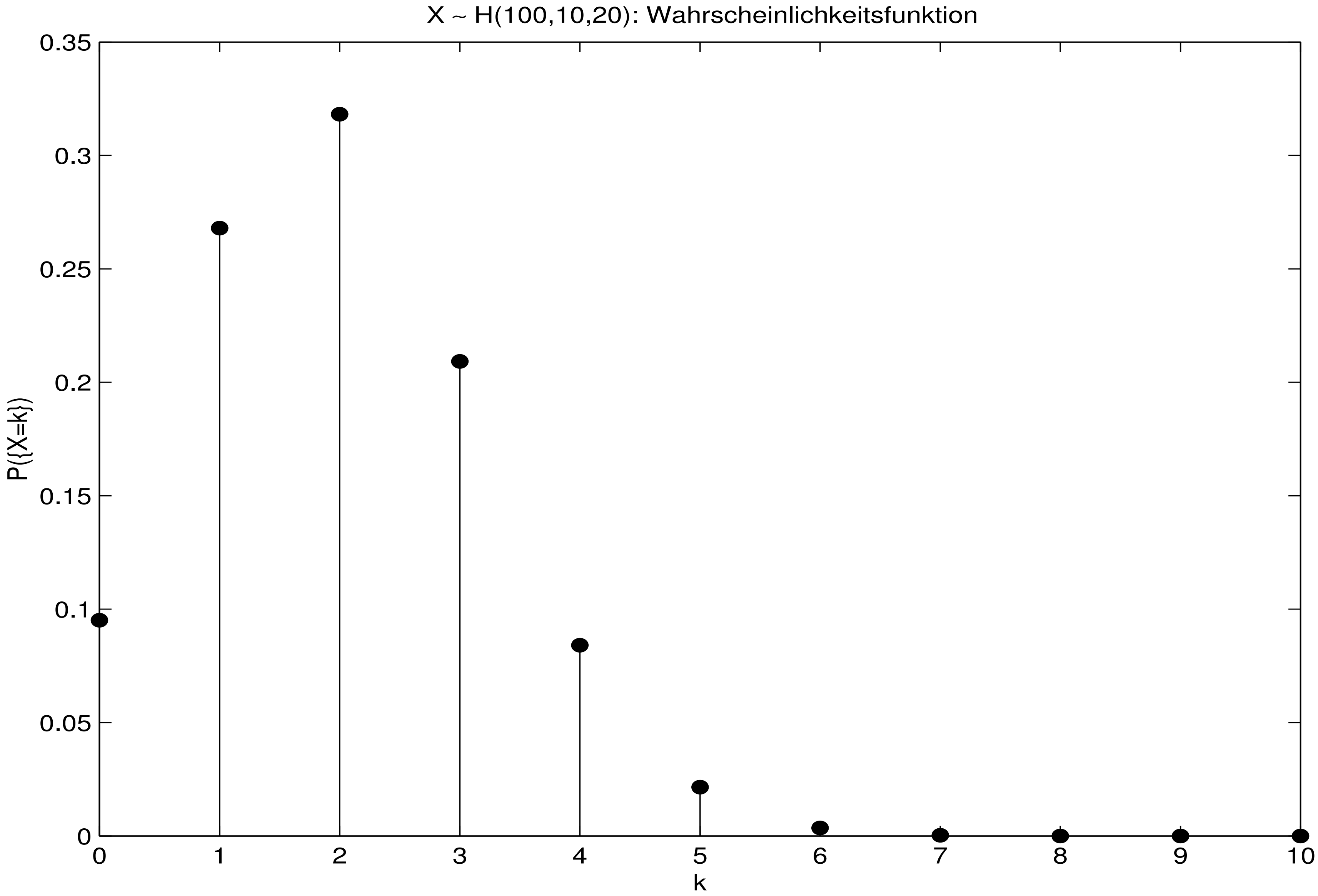
$$P(\{X = \ell\}) = \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n - n_0}{k - \ell} \Big/ \binom{n}{k}$$

für

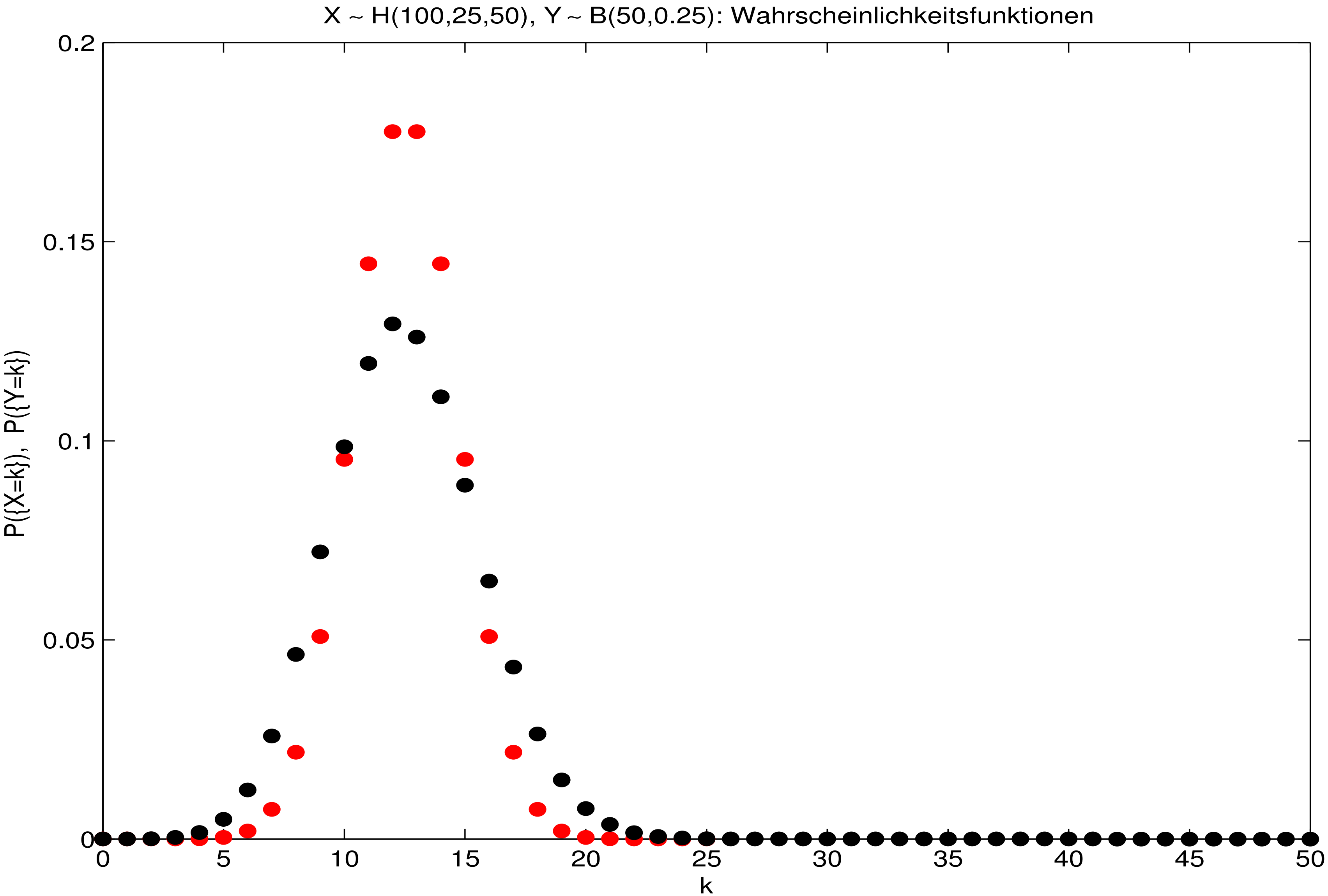
$$\ell \in \{\max(0, k - (n - n_0)), \ldots, \min(n_0, k)\}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{H}(n, n_0, k)$.

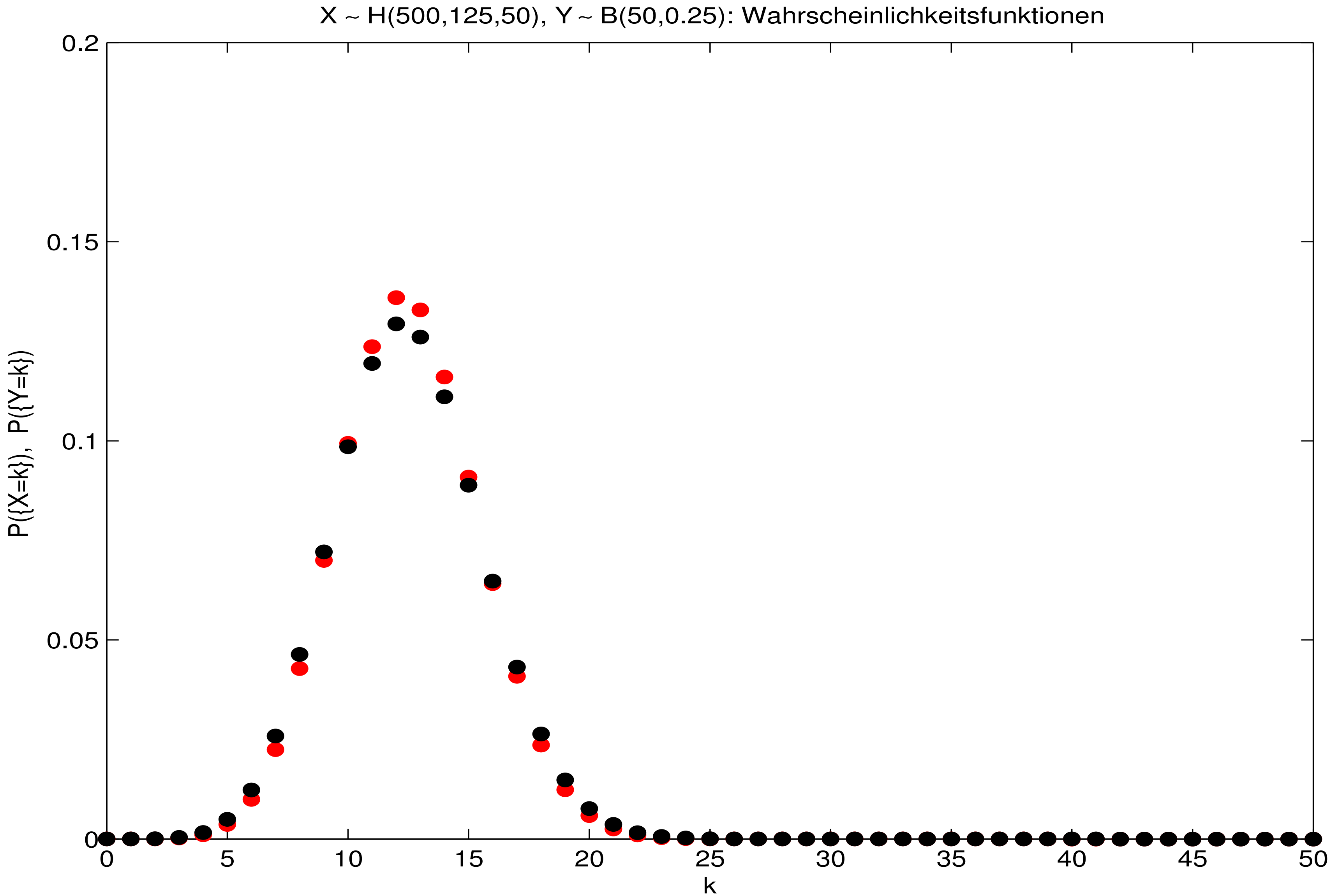
31. Beispiel $X \sim \mathbf{H}(100, 10, 20)$



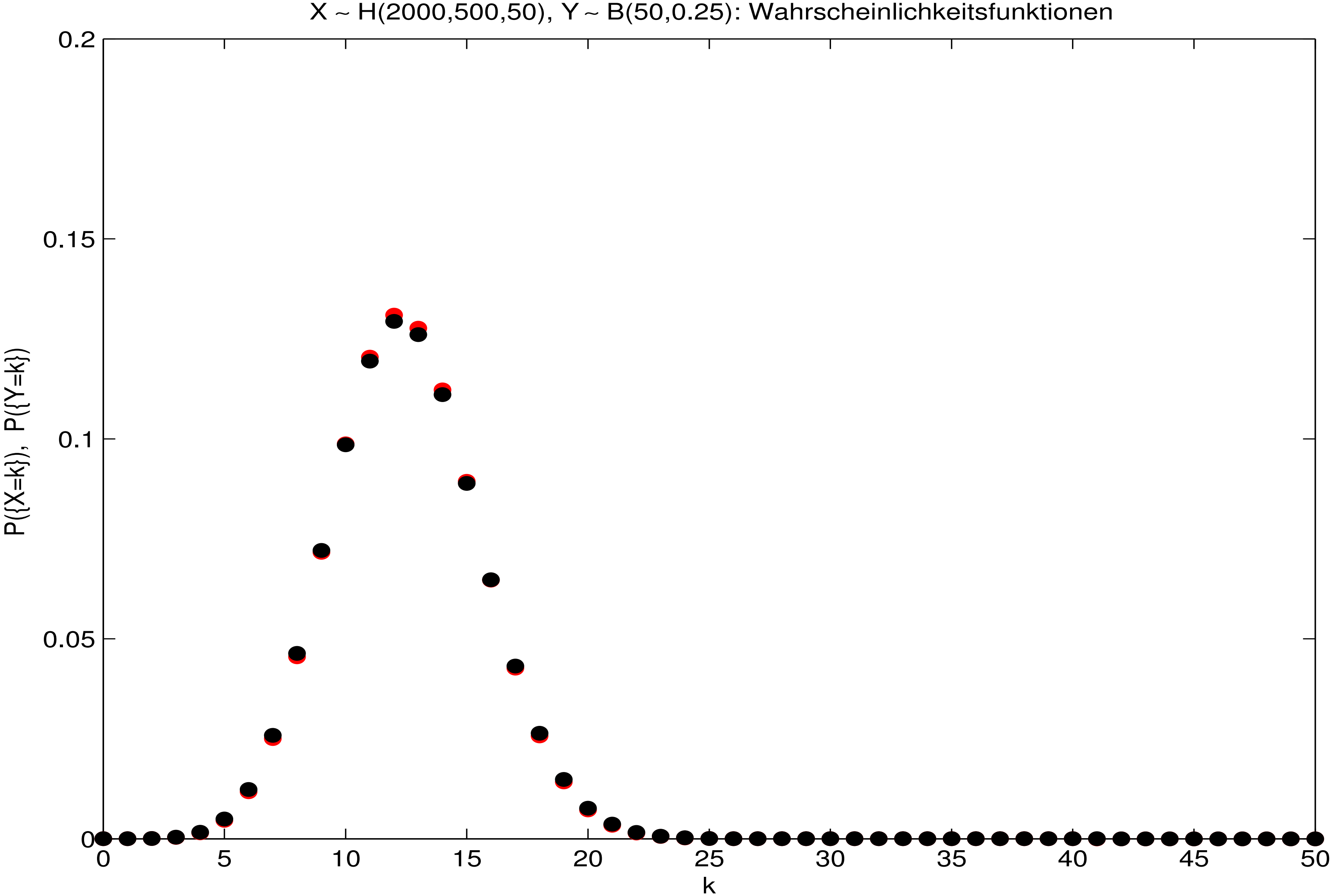
$X \sim \mathbf{H}(100, 25, 50)$ (rot), $Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$ (schwarz)



$$X \sim \mathbf{H}(500, 125, 50), Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$$



$$X \sim \mathbf{H}(2000, 500, 50), Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$$



Vermutung: Konvergenz. Bestätigung: <u>Übung</u>.

32. Beispiel n unabhängige Würfe auf Dartscheibe. Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß im k-ten Wurf erstmals oberes rechtes Viertel getroffen wird.

Abstraktes Modell: $X_1, \ldots, X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$, wobei $p := 1/4$.

Zeitpunkt des ersten Treffers im oberen rechten Viertel:

$$T_n(\omega) := \begin{cases} \inf\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i(\omega) = 1\}, & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } \forall i : X_i(\omega) = 0 \end{cases}$$

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\{T_n = k\} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\} \cap \{X_k = 1\},$$

also, unabhängig von n,

$$P(\{T_n = k\}) = \prod_{i=1}^{k-1} P(\{X_i = 0\}) \cdot P(\{X_k = 1\})$$
$$= (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

Ebenso $P(\{T_n = 0\}) = (1-p)^n$, so daß

$$\lim_{n \to \infty} P(\{T_n = 0\}) = 0.$$

33. Definition X geometrisch verteilt mit Parameter $p \in]0,1]$, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(\{X = k\}) = p \cdot (1-p)^{k-1}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{G}(p)$.

34. Bemerkung Sei $p \in]0,1]$. Auf $\Omega := \mathbb{N}$ definiert

$$f(\omega) := p \cdot (1-p)^{\omega-1}$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Auf dem zugehörigen W'raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ gilt $X \sim \mathbf{G}(p)$ für

$$X(\omega) := \omega.$$

35. Bemerkung Sei $p \in]0,1]$. Für iid ZVen $X_1, X_2, \ldots$ mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ sei

$$T_\infty(\omega) := \begin{cases} \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) = 1\}, & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset \\ 0, & \text{falls } \forall i : X_i(\omega) = 0 \end{cases}$$

Die Rechnung aus Bsp. 32 zeigt für $k \in \mathbb{N}$

$$P(\{T_\infty = k\}) = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

so daß $T_\infty \sim \mathbf{G}(p)$.

Beachte, daß $P(\{T_\infty = 0\}) = 0$, da $\sum_{k=1}^{\infty} P(\{T_\infty = k\}) = 1$.

36. Bemerkung **Frage**: Gibt es einen W'raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und darauf eine unendliche Folge $X_1, X_2, \ldots$ von iid ZVen mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$?

Antwort: Ja.

Beweis ist nicht-trivial.

Verwendet Maßtheorie, z.B. Existenz des Lebesgue-Maßes auf $[0, 1]$ für den Fall $p = 1/2$.

Siehe Billingsley (1995), Probability and Measure, Seiten 1–4.

Beachte, daß $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar. Für $\omega \in \Omega$ sei

$$Y_n(\omega) := |\{i \in \{1, \ldots, n\} : \omega_i = 1\}|$$

sowie

$$f(\omega) := \lim_{n \to \infty} p^{Y_n(\omega)} \cdot (1-p)^{n - Y_n(\omega)}.$$

Im Falle $p \in \,]0,1[$ gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$f(\omega) = 0.$$

37. Satz Sei $X_n \sim \mathbf{B}(n, p_n)$ mit $p_n \in]0,1[$, und gelte $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$ für $\lambda > 0$. Dann

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Beweis. Für $n \geq k$

$$\binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(\frac{n \cdot p_n}{\lambda}\right)^k}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(1-\frac{n \cdot p_n}{n})^n}{(1-p_n)^k}}_{\to \exp(-\lambda)} \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n}}_{\to 1}.$$

$\square$

38. Definition X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \; P(\{X = k\}) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$.

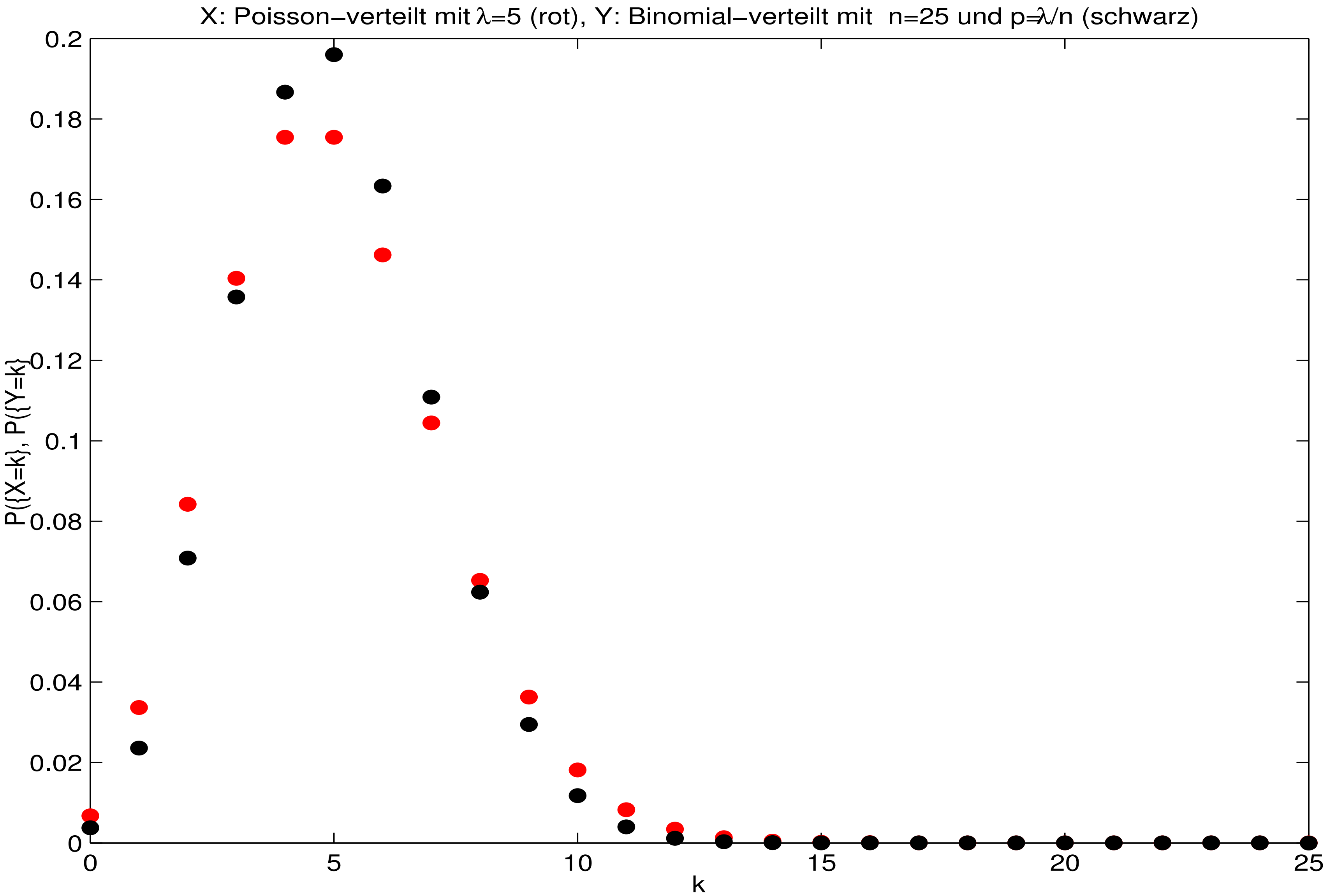
39. Bemerkung In Satz 37: Approximation von $\mathbf{B}(n, p_n)$ durch $\mathbf{P}(\lambda)$, falls n „groß“ und p_n „klein“. Siehe Bsp. VI.6 zur Bedeutung von $n \cdot p_n$.

Siehe Hesse (2003, p. 190–192) zur Approximationsgüte.

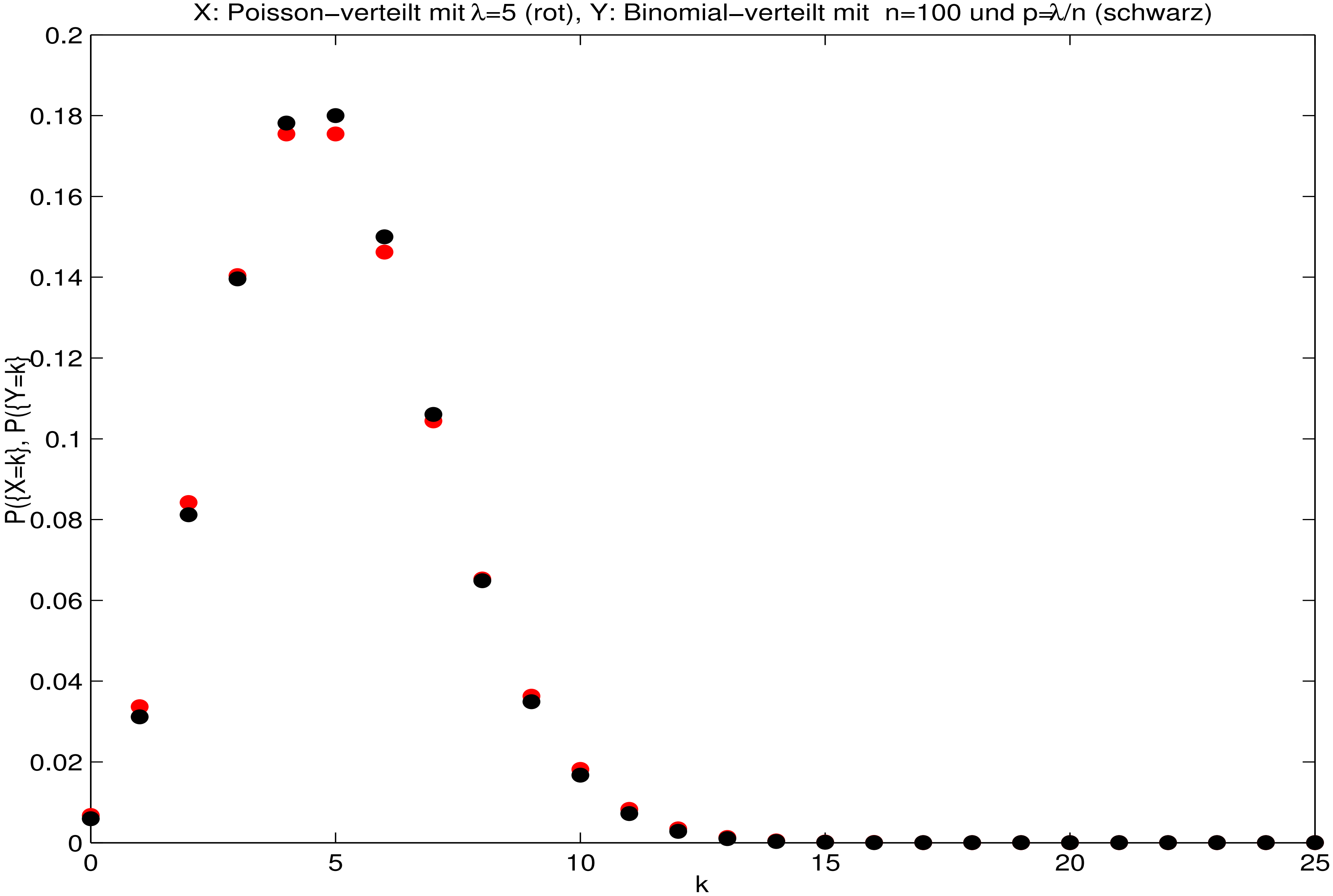
Anwendung: Modellierung der Anzahl von

- Druckfehlern in Manuskript,
- Anrufen in Call-Center pro Tag,
- radioaktiven Zerfällen pro Zeiteinheit.

$X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot), $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 25$ (schwarz)



$X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot), $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 100$ (schwarz)



$X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot), $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 500$ (schwarz)