3 Elementare Kombinatorik

Abzählung von endlichen Mengen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (unter Gleichverteilungsannahme).

Erinnerung $n! := 1 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! := 1$, sowie

- Binomialkoeffizienten für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

und Rekursionsformel für $k \neq 0$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

- Binomischer Lehrsatz: für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Im folgenden $N, N_1, \ldots, N_k$ endliche nicht-leere Mengen und $n := |N|$.

12. Satz

$$|N_1 \times \ldots \times N_k| = |N_1| \cdot \ldots \cdot |N_k|$$

13. Bemerkung Obiger Satz mit $N = N_1 = \ldots = N_k$:
Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus der Menge N unter Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen beträgt n^k.

Ebenso: Anzahl der Abbildungen $\{1, \ldots, k\} \to N$.

Beweis von Satz 12. Induktion über k.

Für $x \in N_{k+1}$ sei

$$A_x := \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k+1}) \in N_1 \times \cdots \mathbb{N}_{k+1} : x = \omega_{k+1}\}.$$

Dann $A_x \cap A_y = \emptyset$ für $x \neq y$ sowie

$$N_1 \times \ldots \times N_{k+1} = \bigcup_{x \in N_{k+1}} A_x.$$

Ferner, unter Verwendung der Induktionsannahme,

$$|A_x| = |N_1 \times \ldots N_k| = |N_1| \cdot \ldots \cdot |N_k|.$$

Fazit

$$|N_1 \times \ldots \times N_{k+1}| = \sum_{x \in N_{k+1}} |N_1 \times \ldots \times N_k| = |N_{k+1}| \cdot |N_1| \cdot \cdots \ldots \cdot |N_k|.$$

$\square$

14. Satz

$$\left|\{(\omega_1,\ldots,\omega_k)\in N^k : \omega_1,\ldots,\omega_k \text{ paarw. verschieden}\}\right|$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!}=n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Für $k=n$: Anzahl der Permutationen von N ist $n!$

15. Bemerkung Obiger Satz: Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus der Menge N unter Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen beträgt $n!/(n-k)!$

Ebenso: Anzahl der Injektionen $\{1,\ldots,k\}\to N$

Beweis von Satz 14. Seien $2 \leq k+1 \leq n$ und $x \in N$. Setze

$$Q := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}) \in N^{k+1} : \omega_1, \ldots, \omega_{k+1} \text{ paarw. verschieden}\}$$

und

$$A_x := \{\omega \in Q : \omega_{k+1} = x\}.$$

Dann

$$\begin{aligned} |A_x| &= |\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in (N \backslash \{x\})^k : \omega_1, \ldots, \omega_k \text{ paarw. verschieden}\} \\ &= (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-1-k+1) = (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k). \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} |Q| &= (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot n \\ &= \tfrac{n!}{(n-(k+1))!}. \end{aligned}$$

$\square$

16. Beispiel $\Omega := N^k$ mit Gleichverteilung P. Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß in Stichprobe $\omega \in \Omega$ mindestens 2 Komponenten übereinstimmen. Also

$$A := \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.$$

Es gilt $P(A) = 1 - P(A^c)$ und

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot \ldots \cdot n}$$
$$= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Für $n = 365$ (Geburtstagszwillinge) ergibt sich näherungsweise

k	4	16	22	23	40	64
$P(A)$	$0,016$	$0,284$	$0,476$	$0,507$	$0,891$	$0,997$

Implizit angenommen: Geburtstage unabhängig und jeweils gleichverteilt auf $N = \{1, \ldots, 365\}$, siehe Bsp. 8 und Bem. 11.

17. Satz Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt

$$|\{K \subseteq N : |K| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

18. Bemerkung Obiger Satz: Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus Menge N ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen.

Vergleich der Sätze 14 und 17. Es gilt

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Interpretation: Teilmenge auswählen und anordnen.

Beweis von Satz 17. Induktion nach $n = |N|$.

Sei $|N'| = n + 1 \in \mathbb{N}$. Die Behauptung gilt offenbar für $k = 0$ und $k = n + 1$, also fortan $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Fixiere $x \in N'$, setze $N = N' \setminus \{x\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
|\{K' \subseteq N' : |K'| = k\}| &= |\{K' \subseteq N : |K'| = k \wedge x \in K'\}| \\
&\quad + |\{K' \subseteq N' : |K'| = k \wedge x \notin K'\}| \\
&= |\{K \subseteq N : |K| = k - 1\}| \\
&\quad + |\{K \subseteq N : |K| = k\}| \\
&= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

19. Beispiel Lotto: Gleichverteilung auf

$$\Omega := \{K \subseteq \{1, \ldots, 49\} : |K| = 6\}.$$

Also für jedes $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = 1/\binom{49}{6} = 7,15\ldots \cdot 10^{-8}.$$