2 Produkträume

Gegeben:

diskrete W'räume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1), \dots, (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_n)$

Gesucht:

Modell für „unabh. Hintereinanderausführung“ der Einzelexperimente (Produktexperiment)

5. Beispiel n-maliges Würfeln, n Geburten, . . .

Fragwürdig bei Callcenter an n Tagen.

Definiere

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,$$
$$\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega),$$
$$f(\omega) := f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n), \quad \omega \in \Omega,$$

wobei f_i die zu P_i gehörige W'funktion auf Ω_i.

6. Lemma f ist Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω.

Beweis. Klar: $f \geq 0$. Ferner

$$\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = \sum_{\omega_1\in\Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n)$$
$$= \sum_{\omega_\in\Omega_1} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \sum_{\omega_n\in\Omega_n} f_n(\omega_n) = 1. \qquad \square$$

7. Definition Sei P das durch f definierte W'maß auf $\mathfrak{A}$.

Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ das Produkt der W'räume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, P_i)$ und P das Produkt der W'maße P_i.

8. Beispiel Für endliche Mengen Ω_i und Gleichverteilungen P_i ist das Produktmaß P die Gleichverteilung auf Ω.

So etwa für n-maliges Würfeln:

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$$

und

$$P(\{\omega\}) = 1/6^n$$

für $\omega \in \Omega$.

9. Beispiel Geschlecht von n Neugeborenen,

$$\Omega_i := \{\mathsf{W}, \mathsf{M}\}, \ f_i(\mathsf{W}) := p, \ f_i(\mathsf{M}) := 1 - p.$$

Also

$$f(\omega) = p^{k(\omega)} \cdot (1-p)^{n-k(\omega)}$$

mit

$$k(\omega) := |\{i \in \{1, \ldots, n\} : \omega_i = \mathsf{W}\}|.$$

Im folgenden: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Produkt der W'räume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, P_i)$.

Zurück zu den Einzelexperimenten durch die Projektionen

$X_i : \Omega \to \Omega_i$, d.h.

$$X_i(\omega) := \omega_i.$$

Siehe etwa Bsp. II.35.

10. Satz Für $A_1 \subseteq \Omega_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega_n$ gilt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i).$$

Beweis. Es gilt (vgl. Beweis Lemma 6)

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in A_i\}\right) &= P(A_1 \times \ldots \times A_n) \\ &= \sum_{\omega \in A_1 \times \ldots \times A_n} f(\omega) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} \cdots \sum_{\omega_n \in A_n} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n) \\ &= P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n). \end{aligned}$$

Die Wahl von $A_j = \Omega_j$ für $j \neq i$ zeigt

$$P(\{X_i \in A_i\}) = P_i(A_i).$$

□

11. Bemerkung Ziel erreicht. Genauer

(i) Produktraum-Modell beinhaltet Modelle der Einzelexperimente, da $P(\{X_i \in A_i\}) = P_i(A_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $A_i \subseteq \Omega_i$.

(ii) Falls $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subseteq \mathbb{R}$ (oder bei Verwendung eines allgemeineren Begriffs von ZVen und deren Unabhängigkeit), so sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen.
Beweis: Wähle $A_i = \left]-\infty, x_i\right] \cap \Omega_i$ bzw. Ω_i in Satz 10.
Spezialfall $P_1 = \cdots = P_n$ liefert iid-Folge $X_1, \ldots, X_n$.