Kap. III Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und diskrete Zufallsvariablen

1. Wahrscheinlichkeitsfunktionen
2. Produkträume
3. Elementare Kombinatorik
4. Diskrete Zufallsvariablen

In diesem Kapitel

stochastische Modelle für Zufallsexperimente, bei denen die Menge der möglichen Ausgänge abzählbar ist.

1 Wahrscheinlichkeitsfunktionen

1. Definition $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, falls Ω abzählbar und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

In diesem Abschnitt Ω und $\mathfrak{A}$ wie oben. Erste Frage: Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{A}$?

2. Definition $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ Wahrscheinlichkeitsfunktion (auf Ω), falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1.$$

Interpretation: Punktmassen $f(\omega)$. Graphische Darstellung: Stabdiagramm.

3. Satz W'maße und W'funktionen

(i) Jede Wahrscheinlichkeitsfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega), \qquad A \subseteq \Omega, \tag{1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$, und es gilt

$$f(\omega) = P(\{\omega\}), \qquad \omega \in \Omega. \tag{2}$$

(ii) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{A}$ definiert (2) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion f auf Ω, und es gilt (1) .

Beweis. Ad (i): Offenbar gilt $P(A) \in [0,1]$ und $P(\Omega) = 1$.

Ferner gilt für $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ p.d.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ad (ii): klar. $\square$

Modellierung durch Wahl von f. Siehe bereits Bsp. II.13 und II.23. Dazu:

- kombinatorische Methoden, oft ausgehend von Gleichverteilungsannahmen
- statistische Schätzung, siehe bereits Bsp. II.13

4. Beispiel Gleichverteilung auf endlicher Menge Ω entspricht der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(\omega) := \frac{1}{|\Omega|}, \qquad \omega \in \Omega.$$